METRON

RIVISTA INTERNAZIONALE DI STATISTICA — REVUE INTERNATIONALE DE STATISTIQUE
INTERNATIONAL REVIEW OF STATISTICS — INTERNATIONALE STATISTISCHE ZEITSCHRIFT

Vol. VII. N. 2. **31 - III - 1928.**

SOMMARIO — SOMMAIRE — CONTENTS — INHALT

S. Bernstein. *Fondements géométriques de la théorie des corrélations.* pag. 3
V. Furlan. *Sur une formule générale de la moyenne* . . . . . » 29
M. Saibante. *La concentrazione della popolazione* . . . . . » 53
W. T. Russell. *A study of Irish fertility between* 1870 *and* 1911. » 101
L. Hersch. *La population de la Palestine et les perspectives du Sionisme* . . . . » 115

ROMA

AMMINISTRAZIONE DEL « METRON »
R. UNIVERSITÀ — ISTITUTO DI STATISTICA
:: :: :: E POLITICA ECONOMICA :: :: ::

ARTICOLI GIUNTI ALLA RIVISTA CHE VERRANNO PUBBLICATI NEI PROSSIMI NUMERI.
(*Secondo l'ordine d'arrivo*).

ARTIKEL DIE AN DIE ZEITSCHRIFT ANGELANGT SIND UND WELCHE IN DEN NACHFOLGENDEN NUMMERN ERSCHEINEN WERDEN.
(*Nach der Reihenfolge des Eingangs*).

ARTICLES REÇUS PAR LA REVUE ET À PARAÎTRE PROCHAINEMENT.
(*D'après la date de reception*).

ARTICLES RECEIVED BY THE REVIEW WHICH WILL BE PUBLISHED IN FUTURES ISSUES.
(*According to date of receipt*)

V. Romanowsky. *On the criteria that two given samples belong to the same normal population.*

C. Craig. *An application of Thiele's semi-invariants to the sampling problem.*

Ch. Jordan. *Sur une formule d'interpolation dérivée de la formule d'Everett.*

A. Andréadès. *La population de l'Attique aux Ve et IVe siècles.*

F. A. Woods. *Aristocracies and Mental Evolution or Social « Conification ».*

S. BERNSTEIN.

Fondements géométriques de la théorie des corrélations.

Je voudrais indiquer dans ce travail un point de vue nouveau pour aborder le problème général de la dépendance entre des quantités physiques, non reliées fonctionnellement, en cherchant à classer rationellement les lois de corrélations entre ces quantités, d'après la simplicité de l'influence qu'exerce l'une d'elles sur les courbes de distribution des probabilités des autres. Il me semble qu'un schéma théorique dans lequel cette influence est trop compliquée présenterait peu d'intérêt. Il est naturel par conséquent, d'étudier d'abord le cas, (en reduisant, pour fixer les idées, le nombre des quantités considérées à deux), où la connaissance d'une des variables a pour seul effet de déplacer la courbe de distribution de l'autre, sans en modifier les dimensions ; et ensuite, celui où le déplacement est accompagné d'une dilatation ou contraction longitudinale (compensée par une deformation transversale correspondante pour que l'aire totale limitée par la courbe reste invariablement égale à 1). Nous retrouverons ainsi comme cas limite particulièrement important la corrélation dite normale, et je crois que les généralisations que nous obtenons par cette voie pourraient être utilisées, lorsque celle-ci devient inapplicable.

§ 1.

Si on envisage deux quantités x et y qui varient d'une façon continue, il arrive quelquefois que l'une de ces quantités, y, étant fixée, l'autre, x, admet une loi $f_y(x)$ de distribution de probabilités déterminée, et inversement, x étant fixé, la distribution des probabilités de y est représentée par une fonction déterminée

$\varphi_x(y)$. On dit alors que les quantités x et y sont en corrélation. Il est aisé de vérifier que la condition nécessaire et suffisante pour que les fonctions non négatives de deux variables, $f_y(x)$ et $\varphi_x(y)$, puissent représenter les distributions de probabilités indiquées est que

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_y(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_x(y)\,dy = 1, \tag{1}$$

et de plus, que

$$\frac{f_y(x)}{\varphi_x(y)} = \frac{p(x)}{P(y)}, \tag{2}$$

où $p(x)$ et $P(y)$ sont des fonctions d'une seule variable. Alors les fonctions $p(x)$ et $P(y)$, qui seront complètement déterminées, si on ajoute les conditions

$$\int_{-\infty}^{\infty} p(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} P(y)\,dy = 1, \tag{3}$$

représenteront, respectivement, les fonctions de distribution des probabilités à priori de x et y, et

$$z = F(x, y) = P(y) \cdot f_y(x) = p(x) \cdot \varphi_x(y) \tag{4}$$

sera la surface de distribution des probabilités des deux quantités x et y considérées simultanément.

La condition (2) est, évidemment, équivalente (si on suppose les fonctions $f_y(x)$ et $\varphi_x(y)$ deux fois dérivables) à l'équation

$$\frac{\partial^2 \Phi(x, y)}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 \Phi_1(x, y)}{\partial x\, \partial y}, \tag{5}$$

où

$$\Phi(x, y) = \log f_y(x), \quad \Phi_1(x, y) = \log \varphi_x(y).$$

Il n'est, bien entendu, nullement nécessaire que x et y puissent effectivement prendre toutes les valeurs réelles de $-\infty$ à $+\infty$.

On ne se rend pas compte quelquefois que l'hypothèse de l'existence d'une corrélation entre deux quantités doit correspondre à un fait physique très spécial aussi précis et de même nature (seulement un peu plus compliqué) que celle de l'existence

d'une relation fonctionnelle. Il arrive ainsi que dans la majorité des cas les praticiens font une grave erreur en cherchant sans raison suffisante la loi de corrélation entre deux séries d'observations simultanées, en obtenant aprés des calculs pénibles des coefficients qui n'ont aucun sens théorique. En réalité, comme la relation fonctionnelle (biunivoque) signifie qu'à chaque valeur donnée de y il correspond une valeur parfaitement déterminée de x, et inversement : la corrélation exprime qu'à chaque valeur de y il correspond une courbe rigide $f_y(x)$, et inversement, à chaque valeur de x correspond une courbe parfaitement déterminée $\varphi_x(y)$. On doit donc considérer chacune de ces courbes $\varphi_x(y)$ et $f_y(x)$, comme des objets matériels qui dépendent des paramètres x et y, respectivement, et prennent des formes et dimensions déterminées, lorsque les valeurs des paramètres correspondants (qu'on est en droit d'envisager, en quelque sorte comme les causes de ces déformations ou déplacements) sont données.

En nous plaçant à ce point de vue, nous sommes amenés à considérer l'influence de x sur y, comme la plus simple, si les courbes $\varphi_x(y)$ restent *indéformables*, congruentes entre elles, quelle que soit la valeur donnée x (si elles ne subissent même aucun déplacement, en restant fixes, les variables x et y sont indépendantes ; dans ce cas $f_y(x)$ jouira, d'après (2) de la même propriété, nous excluons de notre étude ce cas trivial). Nous dirons alors que y est dur par rapport à x ; ce fait se trouve exprimé par une particularisation de la forme de la fonction $\varphi_x(y)$ qui se réduit à

$$\varphi_x(y) = \varrho(y - \varphi(x)), \tag{6}$$

où $\varrho(y)$ est une fonction d'une seule variable assujettie à la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varrho(y)\, dy = 1.$$

et $\varphi(x)$ une fonction quelconque donnée de x.

A priori, il n'en résulte aucunement que l'influence de y sur x est de la même nature. Mais, s'il en est, effectivement, ainsi, c'est à dire, si x est également dur par rapport à y, nous dirons que x et y se trouvent *en corrélation dure*.

Ainsi l'existence de la corrélation dure entre deux variables x et y correspond à ce fait que chacune d'elles détermine com-

plètement, comme toujours, la valeur moyenne de l'autre, mais, de plus, l'effet de l'ensemble des causes qui fait dévier chaque quantité de sa valeur moyenne correspondante reste le même, quelle que soit la valeur choisie de l'autre quantité. Il est aisé de voir que *la corrélation normale est un cas particulier de la corrélation dure.*

En effet, conformément à la définition habituelle, on dit que les quantités x et y sont en corrélation normale, si la surface des probabilités de x, y est représentée (à un changement d'origine près) par la fonction

$$z = F(x, y) = \frac{1}{2\pi\sigma\sigma_1\sqrt{1 - R^2}} e^{-\frac{\sigma_1^2 x^2 + \sigma^2 y^2 - 2R\sigma\sigma_1 xy}{2\sigma^2\sigma_1^2(1 - R^2)}} \tag{7}$$

σ et σ_1 étant des constantes positives quelconques et la constante R (nommée coefficient de corrélation) satisfaisant à l'inégalité $|R| \angle 1$. Par conséquent, dans ce cas on a identiquement

$$F(x, y) = \frac{e^{-\frac{x^2}{2\sigma^2}}}{\sigma\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\left(y - R\frac{\sigma_1}{\sigma}x\right)^2}{2\sigma^2(1 - R^2)}}}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1 - R^2)}} = \frac{e^{-\frac{y^2}{2\sigma_1^2}}}{\sigma_1\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{e^{-\frac{\left(x - R\frac{\sigma}{\sigma_1}y\right)^2}{2\sigma^2(1 - R^2)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(1 - R^2)}},$$

de sorte que

$$\varphi_x(y) = \frac{e^{-\frac{\left(y - R\frac{\sigma_1}{\sigma}x\right)^2}{2\sigma_1^2(1 - R^2)}}}{\sigma_1\sqrt{2\pi(1 - R^2)}} \tag{8}$$

et

$$f_y(x) = \frac{e^{-\frac{\left(x - R\frac{\sigma}{\sigma_1}y\right)^2}{2\sigma^2(1 - R^2)}}}{\sigma\sqrt{2\pi(1 - R^2)}}, \tag{9}$$

ce qui prouve bien que x et y sont mutuellement durs, lorsque la corrélation est normale.

Il est remarquable que dans ce cas la courbe rigide de distribuction des probabilités de chacune des variables, lorsque l'autre est fixée, est une loi de Gauss.

§ 2.

Nous nous proposons de trouver la forme la plus générale de la corrélation dure. La reponse à cette question est donnée par le théorème suivant :

Soit

$z = F(x, y)$, *où* $F(x, y)$ *reste finie ainsi que ses dérivées des* 4 *premiers ordres, la surface des probabilités des quantités* x, y *qui sont en corrélation dure ; on a alors : ou bien*

$$-\log F(x, y) = Ae^{kx + k_1 y} + Be^{kx} + Ce^{k_1 y} + Dx + Ey + H, \quad (10)$$

où A, B, C *sont des constantes positives quelconques, et les constantes* D, E, k, k_1 *doivent satisfaire aux inégalités* $Dk < 0$, $Ek_1 < 0$ (la constante H sera déterminée par la condition que $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x,y)\,dx\,dy = 1$), *ou bien*

$$-\log F(x, y) = ax^2 + 2\,bxy + cy^2 + dx + ey + h, \quad (11)$$

où $a > 0$, $ac - b^2 > 0$ (les constantes a, b, c, d, e, à ces inégalités près, étant quelconques, et h étant fixé par la condition $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\,dx\,dy = 1$).

Avant de passer à la démonstration, remarquons que *la formule* (11) *qui correspond à la corrélation normale la plus générale, peut être considérée, comme cas limite de la formule* (10) auquel cette dernière va se réduire, lorsque k et k_1 tendent simultanément vers 0, le rapport $\frac{k}{k_1}$ tendant vers une limite déterminée différente de 0 et de $\pm\infty$. En effet, pour que l'expression (10) ne puisse pas prendre des valeurs négatives infiniment croissantes quand kk_1 tend vers 0 (sans que $\log F(x, y)$ ne se réduise à la somme de deux fonctions de x et y séparément, ce qui correspondrait à l'indépendence de ces quantités), il est nécessaire qu'en même temps, A, B, C, D, E, H croissent indéfiniment de façon que

$$\lim Akk_1 = 2\,b, \quad \lim (A + B)\,k^2 = 2\,a, \quad \lim (A + C)\,k_1^2 = 2\,c,$$
$$\lim\,[(A + B)\,k + D] = d, \quad \lim\,[(A + C)\,k_1 + E] = e,$$
$$\lim (A + B + C + H) = h, \quad (12)$$

comme on le vérifie aisément en appliquant la formule

$$e^u = 1 + u + \frac{u^2}{2} + \ldots$$

Remarquons d'ailleurs que, quels que soient les nombres donnés a, b, c, d, e, f satisfaisant seulement aux conditions qui leurs sont imposées dans l'expression (11), on pourra toujours les obtenir par le passage à la limite indiquée dans les relations (12) en fixant arbitrairement le rapport $\frac{k}{k_1} = \lambda$, pourvu que $\lambda b > 0$. Le coefficient de la corrélation normale limite $R = \frac{-b}{\sqrt{ac}}$ sera dans tous les cas égal à

$$R = \pm \lim \frac{A}{\sqrt{(A+B)(A+C)}} \tag{13}$$

Passons à présent à la démonstration de notre théorème.

De la formule (4) nous déduisons

$$-\log F(x, y) = -\log P(y) - \log f_y(x) = -\log(p(x) - \log \varphi_x(y) \tag{14}$$

Or, la dureté de la corrélation est exprimée par les conditions que

$$-\log f_y(x) = \Phi(x - \varphi_1(y)), \quad -\log \varphi_x(y) = \Phi_1(y - \varphi(x)), \tag{15}$$

où $\Phi(u)$, $\Phi_1(u)$, $\varphi(u)$, $\varphi_1(u)$ sont des fonctions d'une seule variable qu'il s'agit de déterminer. Ainsi en posant $-\log P(y) = F(y)$, $-\log p(x) = F_1(x)$, l'équation (14) prend la forme

$$F(y) + \Phi(x - \varphi_1(y)) = F_1(x) + \Phi_1(y - \varphi(x)) \tag{16}$$

En différentiant l'égalité (16) par rapport à x et y successivement, nous obtenons

$$\varphi'_1(y) \cdot \Phi''(x - \varphi_1(y)) = \varphi'(x) \Phi''_1(y - \varphi(x)) \tag{17}$$

Par hypothèse, $\varphi'(x)$ n'est pas identiquement nul (puisque nous excluons le cas de l'indépendance des quantités x et y). Donc, s'il existait une seule valeur de y pour laquelle $\varphi'_1(y) = 0$, cela entrainerait identiquement $\Phi''_1 = 0$; le second membre de (16) se réduirait alors à la somme de deux fonctions de chacune des variables x et y separément, ce qui nous amenerait encore à l'hypothèse exclue de l'indépendance de ces quantités. Cela étant, nous pouvons poser $\log \Phi'' = u$, $\log \Phi''_1 = v$, et en différentiant par rapport à x et y les logarithmes des deux membres de (17), nous aurons

$$\varphi_1(y)\, u''(x - \varphi_1(y)) = \varphi'(x)\, v''(y - \varphi(x)) \tag{18}$$

Donc, en divisant (18) par (17), nous aurons

$$u'' e^{-u} = v'' e^{-v} = G, \tag{19}$$

où G devra être une constante. En effet, u et v sont des fonctions des variables $x - \varphi_1(y)$ et $y - \varphi(x)$ respectivement, qui ne peuvent pas être liées fonctionnellement, car dans ce cas on aurait identiquement $\varphi'(x) = \frac{1}{\varphi'_1(y)} = A$, où A est une constante, de sorte que $\varphi(x) = Ax + a$, $\varphi_1(y) = \frac{y}{A} + b$. Or, dans ces conditions, l'équation (16) prendrait la forme

$$F(y) - F_1(x) + F_2(Ax - y) = 0,$$

ce qui signifierait que $Ax - y$ est à la fois indépendant de x et y, ce qui est impossible : car cela entrainerait que l'espérance mathématique de $(Ax - y)^2$ doit être nulle.

Ainsi, toutes les lois possibles de corrélations dures s'obtiendront par l'intégration de l'équation (19). Supposons d'abord $G \gtrless 0$. On a alors l'intégrale générale de la forme

$$u(x) = \log \frac{2h^2}{G\left[e^{\frac{x-x_0}{2}h} - e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^2},$$

d'où

$$\Phi''(x) = \frac{2h^2}{G\left[e^{\frac{x-x_0}{2}h} - e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^2}, \tag{20}$$

où h et x_0 sont deux constantes arbitraires, et puisque $\Phi'' \leq 0$ est incompatible avec la condition que $F(x, y)$ reste finie, on doit supposer (1) $G > 0$. En intégrant (20), nous aurons

$$\Phi(x) = -\frac{1}{G} \log \left[e^{\frac{x-x_0}{2}h} - e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^2 + lx + m, \tag{21}$$

où l et m sont deux nouvelles constantes. Mais la forme (21) de la fonction $\Phi(x)$ est inadmissible, car on aurait, d'après (15),

$$f_y(x) = \left[e^{\frac{x-x_0}{2}h} - e^{-\frac{x-x_0}{2}h}\right]^{\frac{2}{G}} e^{-lx-m},$$

(1) L'analyse de l'hypothèse $G < 0$, qu'on pourrait admettre en supposant que $F(x, y)$ puisse croître indéfiniment à distance finie, sera faite plus loin.

où x_0 et m sont des fonctions de y; par conséquent, si x croît indéfiniment du coté, où $lx \leq 0$, $f_y(x)$ croitra indéfiniment et ne pourra satisfaire à (1). Il ne reste donc que le cas, où $G = 0$. Alors

$$u(x) = kx + l, \qquad v(x) = k_1 x + l_1,$$

d'où

$$\Phi''(x) = ae^{kx}, \qquad \Phi''_1(y) = a_1 e^{k_1 y}, \tag{22}$$

où a et a_1 sont deux constantes arbitraires *positives*, et k et k_1 deux constantes quelconques.

Supposons d'adord $k = k_1 = 0$. Dans ce cas on a

$$\Phi(x) = \frac{a}{2}x^2 + bx + c, \qquad \Phi_1(y) = \frac{a_1}{2}y^2 + b_1 y + c_1, \tag{23}$$

et puisqu'il résulte de (17) que $\varphi(x)$ et $\varphi_1(y)$ sont alors des fonctions linéaires, nous concluons de (16), dont le premier membre est un polynôme du second degré en x, que $F_1(x)$ est également un polynôme du second degrè en x, et pour une raison analogue $F(y)$ est un polynôme du second degré en y. Donc, d'après (14), $-\log F(x, y)$ est un polynôme du second degrè, et nous arrivons ainsi à l'expression (11) qui correspond à la corrélation normale.

Examinons ensuite la cas, où $k \gtrless 0$, $k_1 = 0$; nous avons donc

$$\Phi(x) = \frac{a}{k^2}e^{kx} + bx + c, \qquad \Phi_1(y) = \frac{a_1}{2}y^2 + b_1 y + c. \tag{24}$$

Il est facile de voir que ce cas doit être exclu. En effet, on aurait, d'après (17),

$$\varphi'_1(y)\, ae^{k(x - \varphi_1(y))} = \varphi'(x)\, a_1;$$

donc

$$a\,\varphi'_1(y)\, e^{-k\varphi_1(y)} = a_1\,\varphi'(x)\, e^{-kx} = A,$$

où A est une constante. Par conséquent, B et B_1 étant des constantes,

$$-\frac{a}{k}e^{-k\varphi_1(y)} = Ay + B, \qquad a_1\varphi(x) = \frac{A}{k}e^{kx} + B_1, \tag{25}$$

et en substituant (24) et (25) dans (16), nous aurions

$$-\log F(x, y) = F(y) - \frac{Ay + B}{k}e^{kx} + b(x - \varphi_1(y)) + C =$$

$$= \frac{a_1}{2}\left[y - \frac{Ae^{kx}}{ka_1} - \frac{B_1}{a_1}\right]^2 + b_1\left(y - \frac{Ae^{kx}}{ka_1} - \frac{B_1}{a_1}\right) + C + F_1(x) =$$

$$= -\frac{Ay + B}{k}e^{kx} + bx + \frac{a_1}{2}y^2 + b_1 y + h,$$

où h est une constante ; nous voyons donc que le coefficient de e^{kx} pouvant devenir positif ou négatif, suivant le choix de y, il existerait des valeurs de y, pour lesquelles, x croissant indéfiniment du côté où $kx > 0$, $F(x, y)$ croîtrait indéfiniment, ce qui est inadmissible.

Nous n'avons donc encore que la seule hypothèse possible, où $kk_1 \gtrless 0$. Dans ce cas

$$\Phi(x) = \frac{a}{k^2} e^{kx} + Dx + c, \qquad \Phi_1(y) = \frac{a_1}{k_1^2} e^{k_1 y} + Ey + c_1, \quad (26)$$

et puisque $\Phi(x)$ et $\Phi_1(y)$ ne doivent pas devenir infiniment grands négatifs, il faut supposer que $Dk < 0$, $Ek_1 < 0$. Dans ces conditions, l'équation (17) devient

$$a \varphi'_1(y) e^{k(x - \varphi_1(y))} = a_1 \varphi'(x) e^{k_1(y - \varphi(x))},$$

d'où

$$a_1 \varphi'(x) e^{-(kx + k_1 \varphi(x))} = a \varphi'_1(y) e^{-(k_1 y + k \varphi_1(y))} = -Akk_1 \quad (27)$$

A étant une constante arbitraire.

De (27) nous tirons par intégration

$$a_1 e^{-k_1 \varphi(x)} = (Ae^{kx} + C) k_1^2, \quad a e^{-k \varphi_1(y)} = (Ae^{k_1 y} + B) k^2, \quad (28)$$

où B et C sont des constantes. L'égalité (16) prendra donc la forme

$$F(y) + e^{kx}(Ae^{k_1 y} + B) + D\left[x + \frac{1}{k}\log(Ae^{k_1 y} + B)\right] + d = \quad (29)$$

$$= F_1(x) + e^{k_1 y}(Ae^{kx} + C) + E\left[y + \frac{1}{k_1}\log(Ae^{kx} + C)\right] + d_1,$$

d'où il résulte que

$$-\log F(x, y) = Ae^{kx + k_1 y} + Be^{kx} + Ce^{k_1 y} + Dx + Ey + H, \quad (10)$$

H étant une constante qui sera déterminée par la condition

$$\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} F(x, y)\, dx\, dy = 1$$

qui pourra être réalisée, pourvu qu'on ait $A > 0$, $B > 0$, $C > 0$ avec $Dk < 0$, $Ek_1 < 0$, car avec ces inégalités, on aura pour $x^2 + y^2$ assez grand

$$F(x, y) < e^{-(|Dx| + |Ey| + H)}.$$

Le théorème est ainsi démontré.

§ 3.

Ajoutons quelques remarques. Les équations (26) peuvent, à un changement d'origine près, être mises sous la forme

$$\Phi(x) = D\left(x - \frac{e^{kx}}{k}\right) + c\,, \qquad \Phi_1(y) = E\left(y - \frac{e^{k_1 y}}{k_1}\right) + C, \qquad (26\ \text{bis})$$

de sorte que le minimum de $\Phi(x)$ et $\Phi_1(y)$ est atteint pour $x = 0$, $y = 0$, respectivement.

Nous avons donc

$$\varphi_x(y) = \varrho\,(y - \varphi(x))\,, \qquad f_y(x) = \varrho_1(x - \varphi_1(y))\,, \qquad (6\ \text{bis})$$

où

$$\varrho_1(x) = \lambda_1\, e^{D\left(\frac{e^{kx}}{k} - x\right)}, \qquad \varrho(y) = \lambda\, e^{E\left(\frac{e^{k_1 y}}{k^1} - y\right)}, \qquad (30)$$

λ et λ_1 se trouvant déterminées par la condition (1), de sorte que

$$\lambda_1 = \frac{k}{\Gamma\left(-\frac{D}{k}\right)} \cdot \left(-\frac{D}{k}\right)^{-\frac{D}{k}}\,, \qquad \lambda = \frac{k_1}{\Gamma\left(-\frac{E}{k_1}\right)} \cdot \left(-\frac{E}{k_1}\right)^{-\frac{E}{k_1}}$$

où Γ est la fonction classique d'Euler.

Les formules (30) généralisent la loi des erreurs de Gauss, qu'elles ont pour limite, quand k et k_1 tendent vers 0 (pourvu que Ek_1 et Dk tendent vers des limites négatives finies).

Il est intéressant de noter que le changement de variables $e^{kx} = u$ ramène, par exemple, la première des courbes (30) à la forme

$$\frac{\lambda_1}{k}\, e^{\frac{Du}{k}} \cdot u^{-\left(\frac{D}{k} + 1\right)}$$

qui est une des courbes de distribution de Pearson. Il est inutile de dire que, après le changement des variables $u = e^{kx}$, $v = e^{k_1 y}$ qui conduirait à des distributions de probabilités non congruentes de Pearson, les nouvelles variables ne seront plus en corrélation dure, et ensuite nous reviendrons sur la question de la généralisation de la corrélation dure qui se présente ainsi naturellement.

Mais auparavant continuons notre examen général des propriétés qui correspondent à la surface des probabilités donnée par l'équation (10). Il est facile de voir qu'elle admet un sommet unique que

nous pouvons prendre pour origine (ce sera la *mode* de x et y); ceci nous conduira aux relations entre les coefficients

$$(A+B)\,k+D=0\,, \qquad (A+C)\,k_1+E=0. \tag{31}$$

Alors, en tenant compte que, d'après (26 bis), $a=-Dk$, $a_1=-Ek_1$, nous tirons de (28) et (31)

$$(A+C)\,e^{-k_1\varphi(x)}=(Ae^{kx}+C)\,, \qquad (A+B)\,e^{-k\varphi_1(y)}=Ae^{k_1y}+B,$$

d'où nous concluons que

$$\varphi(x)=-\frac{1}{k_1}\log\frac{Ae^{kx}+C}{A+C}\,, \qquad \varphi_1(y)=-\frac{1}{k}\log\frac{Ae^{k_1y}+B}{A+B}$$

sont des fonctions monotones qui s'annullent pour $x=0$, $y=0$, respectivement. Les courbes

$$y=-\frac{1}{k_1}\log\frac{Ae^{kx}+C}{A+C}\,, \qquad x=-\frac{1}{k}\log\frac{Ae^{k_1y}+B}{A+B} \tag{32}$$

sont les lignes de regression (modale) de y d'après x et de x d'après y respectivement. Puisque la corrélation est dure, il est évident que le déplacement de la mode est le même que celui de la moyenne ou de la médiane et de n'importe quel point choisi de la courbe qui se transporte parallelement. Ainsi les mêmes équations (32) représenteraient aussi à un changement d'origine près les lignes de regression moyenne de y et x, respectivement. Il est facile de voir que la tangente à la première de ces courbes par exemple à pour coefficient angulaire $-\frac{k}{k_1}\cdot\frac{A}{A+Ce^{-kx}}$ qui tend vers une constante (coefficient de regression normale), lorsque k et k_1 tendent vers 0. Dans tous les cas cette première courbe a pour asymptotes

$$y=-\frac{k}{k_1}x-\frac{1}{k_1}\log\frac{A}{A+C} \quad \text{et} \quad y=-\frac{1}{k_1}\log\frac{C}{A+C}$$

du coté où $kx>0$ et du coté où $kx<0$, respectivement.

En remarquant ainsi que la mode de $\varphi_x(y)$ tend vers une limite fixe, lorsque x croit dans une certaine direction, nous constatons que le déplacement de la courbe $\varphi_x(y)$ est limité (dans le cas de la corrélation dure donnée par le formule (10), d'un coté au moins.

Par conséquent, nous pouvons caractériser la corrélation normale considérée comme cas particulier de la corrélation dure de

bien des façons. Ainsi, par exemple, *la corrélation dure est normale, si* x *croissant indéfiniment de n'importe quel coté, la moyenne de* y *croît aussi indéfiniment*.

Au point de vue analytique, il faut noter aussi que l'hypothèse supplémentaire que $\log F(x, y)$ soit algébrique permet d'affirmer que toute corrélation dure doit être normale.

Sans insister sur les applications de ce qui précède je remarquerai encore que la distribution des probabilités a priori, comme il est facile de voir, est présentée par les fonctions

$$P(y) = \lambda \left[1 + \frac{A}{B} e^{k_1 y}\right]^{\frac{D}{k}} e^{-Ey - Ce^{k_1 y}},$$

$$p(x) = \lambda_1 \left[1 + \frac{A}{C} e^{kx}\right]^{\frac{E}{k_1}} e^{-Dx - Ce^{kx}}$$

Il est évident que ces fonctions de distribution admettent des moments finis de tous les ordres dont le calcul se fait par l'application de la théorie de la fonction Eulerienne Γ, car, en posant $-\frac{D}{k} = \beta$, on a

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\mu e^{kx} - Dx} dx = \frac{1}{k} \Gamma(\beta) \mu^{-\beta} = \psi(\beta)$$

et

$$\int_{-\infty}^{\infty} x^m e^{-\mu e^{kx} - Dx} dx = \frac{1}{k^m} \psi^{(m)}(\beta),$$

quelque soit le nombre entier m. Ainsi, par exemple, l'espérance mathématique du carré de l'écart de la moyenne pour la courbe de distribution (30)

$$\varrho_1(x) = \lambda_1 e^{D\left(\frac{e^{kx}}{k} - x\right)}$$

est

$$\sigma^2 = \frac{1}{k^2} \left(\frac{\Gamma'(\beta)}{\Gamma(\beta)}\right)' \sim \frac{1}{Dk} + \frac{1}{2D^2} + \dots,$$

le développement asymptotique se réduisant à son premier terme $\frac{1}{Dk}$, lorsque la courbe $\varrho_1(x)$ tend vers la courbe normale qu'on obtient en approchant k de zéro et en augmentant D indéfiniment.

§ 4.

Dans l'étude de la corrélation dure faite jusqu'ici, nous avons supposé $F(x, y)$ finie pour toute valeur de x, y. Admettons à présent que $F(x, y)$ puisse devenir exceptionnellement infinie, sans cesser de rester continue, en général, et de posséder des dérivées des 4 premiers ordres. Dans ces conditions, tous les raisonnements du § 2 subsistent, sauf la conclusion que $\Phi'' > 0$, $\Phi''_1 > 0$; nous retrouvons donc la même équation (19), mais nous devons examiner encore la fonction (21), où $G = -p < 0$, qui conduit aux courbes de distribution des probabilités

$$f_y(x) = \frac{\lambda\, e^{-l(x-\varphi_1(y))}}{\left[e^{\frac{x-\varphi_1(y)}{2}h} - e^{-\frac{x-\varphi_1(y)}{2}h}\right]^{\frac{2}{p}}}$$

$$\varphi_x(y) = \frac{\lambda_1\, e^{-l_1(y-\varphi(x))}}{\left[e^{\frac{y-\varphi(x)}{2}h_1} - e^{-\frac{y-\varphi(x)}{2}h_1}\right]^{\frac{2}{p}}}; \tag{33}$$

λ, λ_1, l, h, l_1, h_1, étant des constantes que, sans restreindre la généralité, nous supposerons positives. En tenant compte de (17), on a, pour déterminer $\varphi(x)$ et $\varphi_1(y)$, l'identité

$$\frac{h^2\varphi'_1(y)}{\left[e^{\frac{x-\varphi_1(y)}{2}h} - e^{-\frac{x-\varphi_1(y)}{2}h}\right]^2} = \frac{h_1^2\varphi'(x)}{\left[e^{\frac{y-\varphi(x)}{2}h_1} - e^{-\frac{y-\varphi(x)}{2}h_1}\right]^2} \tag{34}$$

En attribuant à y deux valeurs fixes différentes y_0 et y_1, on déduit de la que

$$e^{h_1\varphi(x)} = \frac{Ae^{hx} + B}{Ce^{hx} + D}, \tag{35}$$

A, B, C, D étant des constantes fixes. En remarquant, d'autre part, que l'égalité (34) exige que $\varphi(x)$ et $\varphi_1(y)$ soient des fonctions inverses, nous pouvons mettre (35) sous la forme

$$e^{h_1 x} = \frac{Ae^{h\varphi_1(x)} + B}{Ce^{h\varphi_1(x)} + D};$$

donc

$$e^{h\,\varphi_1(y)} = \frac{De^{h_1 y} - B}{A - Ce^{h_1 y}}. \qquad (35 \text{ bis})$$

Enfin, de (2), nous tirons

$$\frac{p(x)}{P(y)} = \frac{\lambda}{\lambda_1} e^{-l(x-\varphi_1(y)) + l_1(y-\varphi(x))} \times$$

$$\times \left[\frac{e^{\frac{h_1 y}{2}} \sqrt{\dfrac{Ce^{hx}+D}{Ae^{hx}+B}} - e^{-\frac{h_1 y}{2}} \sqrt{\dfrac{Ae^{hx}+B}{Ce^{hx}+D}}}{e^{\frac{hx}{2}} \sqrt{\dfrac{A-Ce^{h_1 y}}{De^{h_1 y}-B}} - e^{-\frac{hx}{2}} \sqrt{\dfrac{De^{h_1 y}-B}{A-Ce^{h_1 y}}}} \right]^{\frac{2}{p}};$$

d'où

$$p(x) = \mu\, e^{-lx} \left[\frac{Ae^{hx}+B}{Ce^{hx}+D}\right]^{-\frac{l_1}{h_1}} \left[(Ae^{hx}+B)(Ce^{hx}+D)\right]^{-\frac{1}{p}} e^{\frac{hx}{p}} \qquad (36)$$

et (36 bis)

$$P(y) = \mu_1 e^{-l_1 y} \left[\frac{B-De^{h_1 y}}{A-Ce^{h_1 y}}\right]^{-\frac{l}{h}} \left[(B-De^{h_1 y})(A-Ce^{h_1 y})\right]^{-\frac{1}{p}} e^{\frac{h_1 y}{p}}$$

où μ et μ_1 sont des constantes qui se déterminent par la condition (3)

Il est évident, à cause de (33), qu'il est nécessaire que $p > 2$. Ensuite, si l'on veut seulement que ces formules soient valables pour toutes les valeurs $x > \varphi_1(y)$ et $y > \varphi(x)$, il faut que $\varphi'(x) < 0$, c'est à dire que $AD - BC < 0$. Dans ces conditions, il suffira de supposer, en outre, $\frac{A}{C} > 0$ et $\frac{D}{C} < 0$, car dans ce cas la ligne de déplacement $y = \varphi(x)$ sera située dans le premier cadran formé par les droites

$$y = \frac{1}{h_1} \log \frac{A}{C}, \qquad x = \frac{1}{h} \log\left(-\frac{D}{C}\right)$$

qu'elle aura comme asymptotes, et de plus la surface de distribution des probabilités de x, y se trouvera dans le même cadran, les formules (36) et (36 bis) étant admissibles, puisque les facteurs $Ae^{hx} + B$ et $B - De^{h_1 y}$ ne s'annulleront pas dans la région considérée. La dépendance entre y et x s'accroît et tend vers la dé-

pendance fonctionnelle, lorsque p diminue en s'approchant de 2. Actuellement, la surface de distribution ne peut pas s'étendre sur tout le plan ; elle a pour équation

$$F(x, y) = \frac{e^{x\left(\frac{h}{p}-l\right)+y\left(\frac{h_1}{p}-l_1\right)}}{(Ce^{xh+yh_1} + De^{yh_1} - Ae^{xh} - B)^{\frac{2}{p}}}$$

Soit, par exemple, $h = h_1 = A = C = -D = 1$, $l = l_1 = \frac{1}{p}$; alors (à un facteur numérique près)

$$F(x, y) = \frac{1}{[e^{x+y} - e^x - e^y - B]^{2l}} = \frac{1}{(e^y + B)^{2l}} \cdot \frac{1}{[e^{x-\varphi_1(y)} - 1]^{2l}},$$

où

$$\varphi_1(y) = \log \frac{e^y + B}{e^y - 1} \quad \text{avec } B > -1, \; 0 < l < \frac{1}{2}.$$

§ 5.

Le changement de variables $e^{ax} = X$, $e^{by} = Y$ transforme la corrélation dure en une corrélation simplement *élastique*, c'est à dire telle que X étant fixé, la courbe de distribution $\varphi_X(Y)$ éprouve une dilatation longitudinale (ou contraction) déterminée (accompagnée de la deformation transversale correspondante) et inversement. Toutes les formes de corrélation simplement élastique s'obtiennent donc comme conséquences des formules précédentes.

D'une façon générale, il me semble important de généraliser la corrélation dure en faisant le changement des variables

$$X = f(x), \qquad Y = \varphi(y); \tag{37}$$

nous dirons qua X et Y sont en corrélation relativement dure, si par un choix convenable de f et φ on peut former des quantités élémentaires x et y qui soient en corrélation dure. Ainsi, la corrélation relativement dure la plus générale qui correspond au théorème du § 2 se présente sous la forme

$$F(x, y) = e^{-Af(x)\varphi(y) - f(x) - \varphi(y)} \cdot f^{p-1}(x) \cdot \varphi^{q-1}(y) \cdot f'(x) \cdot \varphi'(y) \tag{38}$$

avec $p > 0$, $q > 0$, ou bien

$$F(x, y) = e^{-(af^2(x) + 2bf(x)\varphi(y) + e\varphi^2(y))} f'(x)\, \varphi'(y). \tag{38 bis}$$

On peut demontrer que *par le changement de variables* (37), *où* f (x) *et* φ (y) *sont des fonctions monotones, il est possible, en général, de transformer une corrélation quelconque en corrélation rectiligne* (c'est-à-dire telle que les lignes de regression moyenne soient des lignes droites.). Mais ce n'est que dans le cas, où la surface de distribution est donnée par la formule (38 bis) que la corrélation rectiligne obtenue après cette transformation sera normale. Si on a une corrélation relativement dure de la nature (38) il n'est pas possible de la réduire par la transformation indiquée à une corrélation à la fois rectiligne et dure.

Ainsi, à notre point de vue, l'absence de dureté relative entre deux variables x et y prouve le plus souvent que leur séparation est thèoriquement mal fondée, et qu' il est plus rationnel d'envisager certaines combinaisons de ces quantités ; le problème du choix de ces fonctions de deux variables exigérait une étude speciale dans chaque cas, en tenant compte de la nature physique de la question.

Toutefois le principe géométrique qui nous a conduit à la notion de corrélation (absolument) dure amène à envisager sa généralisation qui correspond au cas où les courbes de distribution des probabilités conditionnelles $f_y(x)$ et $\varphi_x(y)$ de chacune des variables éprouve un déplacement parallèle accompagné d'une dilatation (compression).

Nous dirons alors que la corrélation est *isogène*.

Ainsi la corrélation isogène est caractérisée par la proprieté que

$$f_y(x) = f(\lambda_1(y)x - \varphi_1(y)) \,.\, \lambda_1(y), \quad \varphi_x(y) = f_1(\lambda(x) \,.\, y - \varphi(x)) \,.\, \lambda(x) \qquad (40)$$

§ 6.

Il sera utile, pour montrer que la généralisation que nous proposons n'est pas arbitraire, mais conforme aux conceptions habituelles de la théorie des probabilités, de se représenter les deux quantités x et y comme étant composée chacune d'un très grand nombre de petits éléments ξ_i et η_k, respectivement. On sait, sans qu'il soit nécessaire de préciser ici notre affirmation, que, si les éléments ξ_i de $x = \sum_1^n \xi_i$ sont indépendants ou, d'une façon plus générale, si la dépendance des éléments assez éloignés entre eux est suffisamment

faible, la quantité x satisfait à une loi de Gauss

$$\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{(x-a)}{2\sigma^2}}$$

qui dépend de deux paramètres a et σ, dont le premier détermine le déplacement de la distribution et le second — sa dilatation. Si l' influence de y sur x n'est pas directe, mais tient à ce que y étant fixé, tous les éléments ξ_i de x éprouvent des changements individuels plus on moins profonds, où le hasard peut intervenir d'une façon quelconque, pourvu seulement que les éléments ξ_i assez éloignés restent presqu' indépendants, on peut, d'après l'énoncé indiqué plus loin, affirmer que la courbe de distribution des probabilités $f_y(x)$ de x sera une courbe de Gauss, où a et σ pourront être des fonctions de y.

D'après ce qui précède, l' hypothèse que σ est une *constante*, c'est à dire qne x est *dur* par rapport à y, et que y est également *dur* par rapport à x (sans mème supposer que $\varphi_x(y)$ soit une courbe de Gauss, en admettant seulement que le déplacement de la courbe de distribution de x croit indéfiniment avec y entraine que x et y sont en corrélation *normale*.

Nous sommes amenés à prèsent à nous demander quelle sera la corrélation (non dure) qui résulte de l' hypothèse que $f_y(x)$ et $\varphi_x(y)$ sont des courbes de Gauss, les deux paramètres de la première étant des fonctions quelconques de y, et les deux paramètres de la seconde étant des fonctions quelconques de x.

La réponse à cette question est donnée par le

Théorème.

Si $f_y(x)$ *et* $\varphi_x(y)$ *sont des courbes quelconques de Gauss, la surface de distribution des probabilités la plus générale est représentée* (à un changement d'origine près) *par la fonction*

$$z = F(x, y) = he^{-(Cx^2y^2 + Ex^2 + E_1y^2 - 2Dx^2y - 2D_1xy^2 - 2Hxy)}, \qquad (39)$$

où C, E, E_1 *sont des constantes positives, satisfaisant aux inégalités* $CE > D^2$, $CE_1 > D_1^2$, *la constante* H *est arbitraire et* h *est déterminée par la condition que*

$$\iint F(x, y)\, dx\, dy = 1.$$

Si C *tend vers* O, D *et* D_1 *doivent également tendre vers* O, *et alors* (pour que F tende vers O à l'infini) *les inégalités précédentes sont remplacées par* $EE_1 > H^2$, *la surface de distribution se réduisant à la surface normale.*

En effet, on a, par hypothèse

$$f_y(x) = \sqrt{\frac{\lambda_1(y)}{\pi}}\, e^{-\lambda_1(y)[x-\varphi_1(y)]^2},$$

$$\varphi_x(y) = \sqrt{\frac{\lambda(x)}{\pi}}\, e^{-\lambda(x)[y-\varphi(x)]^2}; \qquad (40 \text{ bis})$$

donc, en prenant les logarithmes des deux membres de (4), on a

$$\begin{aligned}-\log F(x,y) &= F(y) + \lambda_1(y)[x-\varphi_1(y)]^2 = \\ &= F_1(x) + \lambda(x)[y-\varphi(x)]^2,\end{aligned} \qquad (41)$$

où

$$F(y) = -\log P(y) - \frac{1}{2}\log\frac{\lambda_1(y)}{\pi},$$

$$F_1(x) = -\log p(x) - \frac{1}{2}\log\frac{\lambda(x)}{\pi}.$$

En différentiant (41) deux fois par rapport à x et une fois par rapport à y on trouve

$$\lambda'_1(y) = y\,\lambda''(x) - (\lambda(x)\,.\,\varphi(x))''. \qquad (42)$$

Donc $\lambda''(x) = 2\,C$, $(\lambda(x)\,.\,\varphi(x))'' = 2\,D$ sont des constantes, et on a nécessairement

$$\lambda_1(y) = Cy^2 - 2\,Dy + E\,, \qquad \lambda(x) = Cx^2 - 2\,D_1\,x + E_1\,,$$

$$\lambda(x)\,.\,\varphi(x) = Dx^2 + Hx + K, \qquad (43)$$

et pareillement,

$$\lambda_1(y)\,.\,\varphi_1(y) = D_1\,y^2 + H_1\,y + K_1$$

De (41) nous tirons ainsi

$$\begin{aligned}-\log F(x,y) &= F(y) + (Cy^2 - 2\,Dy + E)\,x^2 - 2\,x\,(D_1\,y^2 + H_1\,y + K_1) + \\ &+ \frac{(D_1\,y^2 + H_1\,y + K_1)^2}{Cy^2 - 2\,Dy + E} = F_1(x) + (Cx^2 - 2\,D_1\,x + E_1)\,y^2 - 2\,y\,(Dx^2 + \\ &+ Hx + K) + \frac{(Dx^2 + Hx + K)^2}{Cx^2 - 2\,D_1\,x + E_1} = Cx^2\,y^2 - 2\,Dyx^2 - 2\,D_1\,xy^2 - \\ &- 2\,Hxy + Ex^2 + E_1\,y^2 - 2\,K_1\,x - 2\,Ky + L,\end{aligned}$$

où L est une nouvelle constante, et $H_1 = H$.

En choisissant convenablement l'origine, nous pouvons faire $K_1 = K = 0$, et nous arrivons à la forme (33), avec les inégalités énoncées pour que $\lambda_1(y) > 0$ et $\lambda(x) > 0$; en particulier, si $C = 0$, nous obtenons la corrélation normale, puisque de $\lambda_1(y) > 0$ et $\lambda(x) > 0$ il résulte alors que $D = D_1 = 0$.

Dans le cas général, où $C > 0$, les lignes de regression moyenne ont pour équation

$$Y = \varphi(x) = \frac{Dx^2 + Hx}{Cx^2 - 2D_1x + E_1}, \quad X = \varphi_1(y) = \frac{D_1y^2 + Hy}{Cy^2 - 2Dy + E} \tag{44}$$

Le cas, où C est assez petit pour que les valeurs de x et y, pour lesquelles $\varphi'(x)$ et $\varphi'_1(y)$ changent de signe, soient pratiquement impossibles, pourra être utilisé, en seconde approximation dans l'étude des tableaux de corrélation, où l'approximation fournie par l'hypothèse de la corrélation normale devient insuffisante.

Théoriquement, l'hypothèse que $C > 0$ signifie que, si l'une des quantités x ou y prend des valeurs très grandes, l'autre d'elles tend à s'approcher d'une valeur parfaitement déterminée (car $\lambda(x)$ croit infiniment avec x). Ainsi, *en excluant cette dernière circonstance qui parait a priori invraisemblable, on voit que la seule corrélation pour laquelle* $f_y(x)$ *et* $\varphi_x(y)$ *sont des courbes de Gauss est la corrélation normale.*

Ainsi la corrélation isogène, dont nous avons étudié plus haut le cas particulier, où $f_y(x)$ et $\varphi_x(y)$ sont des courbes de Gauss, signifie que la modification que subit la courbe de distribution d'une des quantités, lorsque l'autre est donnée, consiste en un déplacement dur accompagné d'une dilatation (ou compression) de la courbe dans un sens, (auquel doit correspondre naturellement une déformation compensatrice dans l'autre sens pour que l'aire totale limitée par la courbe reste invariablement égale a 1).

Nous nous proposons de trouver toutes les formes de corrélation isogène; en nous limitant toutefois à l'hypothèse que $f(x)$, $f_1(y)$ dans les formules (40) sont des polynômes de degrés quelconques. Cette dernière hypothèse est manifestement équivalente à celle que $\log F(x, y)$ est un polynôme par rapport à x et y.

Nous avons alors la proposition suivante:

Si dans la corrélation isogène, $-\log F(x, y)$ *est un polynôme* $P(x, y)$, *ce polynôme ne pourra être de degrè supérieur à 2 par rapport à aucune des variables.*

En effet, soit, par hypothèse,

$$\begin{aligned} P(x, y) &= F(y) + \Phi(\lambda_1(y) \cdot x - \varphi_1(y)) = \\ &= F_1(x) + \Phi_1(\lambda(x) \cdot y - \varphi(x)) \end{aligned} \tag{45}$$

où Φ et Φ_1 sont des polynômes de degrés k et $k_1 \geq k \geq 1$, $k_1 > 2$, respectivement.

En développant $\Phi_1(\lambda(x)\,y - \varphi(x))$ suivant les puissances de y, nous obtenons des identités de la forme

$$\lambda^{k_1}(x) = P(x), \quad \lambda^{k_1-1}(x)(\varphi(x) + a) = P_1(x), \ldots\ldots,$$
$$\lambda(x)(\varphi^{k_1-1}(x) + \ldots\ldots + h) = P_{k_1-1}(x), \tag{46}$$

les seconds membres de (46) étant des polynômes de degrés non supérieurs à k. En éliminant $\lambda(x)$ des trois premières, nous obtenons une rélation de la forme

$$P_1^2[\varphi^2(x) + b\,\varphi(x) + e] = PP_2(\varphi(x) + a)^2$$

Donc

$$\varphi(x) = A(x) + \sqrt{B(x)}$$

où A et B sont des fonctions rationnelles ; par conséquent,

$$\lambda(x) = (\varphi(x) + a)\frac{P(x)}{P_1(x)} \tag{47}$$

devant avoir une forme analogue, sera, à cause de la première des rélations (46), ou bien *un polynôme*, ou bien *la racine carrée d'un polynôme*, cette dernière circonstance ne pouvant d'ailleurs se présenter que dans le cas, où k_1 est *pair*. De (47) nous tirons

$$\varphi(x) = -a + \frac{\lambda(x)P_1(x)}{P(x)} = -a + \frac{\varrho(x)}{\lambda(x)}, \tag{48}$$

où $\varrho(x)$ est une fonction rationnelle, qui doit se réduire à un *polynôme*. En effet, $\varphi(x) + a$ ne peut devenir infini que, lorsque $\lambda(x) = 0$, par conséquent, ces points sont les seuls pôles possibles de $\varrho(x)$. Or, en portant (48) dans la dernière des rélations (46), nous avons

$$\lambda(x)\left[\left(\frac{\varrho(x)}{\lambda(x)} - a\right)^{k_1-1} + \ldots + h\right] = P_{k_1-1}(x)$$

qui est de la forme

$$\varrho^{k_1-1}(x) + a_1\,\varrho^{k_1-2}(x)\,\lambda(x) + \ldots + R(x)\,\lambda^{k_1-2}(x) = 0 \tag{49}$$

où a_1, a_2, ... sont des constantes et $R(x)$ un polynôme ; donc, si $\varrho(x)$ possédait un pôle, le terme d'ordre le plus élevé dans ϱ^{k_1-1} n'aurait pas de semblables. De plus, si n est le degré de $\lambda(x)$, le degré entier m de $\varrho(x)$, satisfait a l'inégalité $m \leqq n + \dfrac{k-n}{k_1 - 1}$. Naturellement ce qui précède s'applique également à $\Phi(\lambda_1(y)\,x - \varphi_1(y)$.

Remarquons aussi qu'il résulte de (49) que $\dfrac{\varrho^{k_1-1}}{\lambda^{k_1-2}}$ est un polynôme, car, si l'ordre de multiplicité d'une racine de λ est supé-

rieur à celui de ϱ, l'ordre du pôle de $\frac{\varrho^{k_1-1}}{\lambda^{k_1-2}}$ serait supérieur à celui de $\frac{\varrho^{k_1-l}}{\lambda^{k_1-l-1}}$, pour $l > 1$. En particulier, lorsque λ est un polynôme qui n'a que des racines simples, ϱ est divisible par λ ; de même, si λ^2 n'a que des racines simples, $\frac{\varrho}{\lambda^2}$ sera un polynôme.

Soit d'abord, $k = k_1$. Alors les degrés n de $\lambda(x)$ et n_1 de $\lambda_1(y)$ ne dépassent pas 1, ainsi que les degrés de $\varphi(x)$ et $\varphi_1(y)$ qui sont non superieurs à $\frac{k-n}{k-1}$; d'ailleurs, pour $n = \frac{1}{2}$, le degré m de $\varrho(x)$ doit être, à cause de (48), égal à 1 ; nous voyons donc que, ou bien, λ est une constante ($\varphi(x)$ étant un polynôme du premier degré), ou bien d'après ce qui précède $\frac{\varrho}{\lambda^2}$ est une constante, ou bien, enfin, $\lambda(x)$ et $\varphi(x)$ sont des polynômes du premier degré. Ce dernier cas qui comprend comme cas particulier celui où λ est une constante ramène le second membre de (45) à la forme

$$F_1(x) + \sum_{i=1}^{k} A_i (axy + by + cx + d)^i ;$$

par conséquent, le coefficient de x^k serait une constante ou un polynôme de y de degré k de la forme $A + A_k(ay + c)^k$, dont la racine de degré k ou $\frac{k}{2}$ ne pourra être rationelle (pour $k > 2$) que si $Aa = 0$; donc $\lambda_1(y)$, et par suite $\varphi_1(y)$, sont également linéaires, et on aurait également $\lambda_1(y) \,.\, x - \varphi_1(y) = axy + by + cx + d$; les polynômes Φ et Φ_1 seraient identiques, et $F(y)$ et $F_1(x)$ se reduiraient à des constantes, de sorte que les distributions des probabilités a priori de x et y seraient représentées par $p(x) = \frac{1}{ax+b}$ et $P(y) = \frac{1}{ay+c}$ ce qui est inadmissible. (L'impossibilitè de l'hypothèse $\frac{\varrho}{\lambda^2} =$ const. résulte du raisonnement de la page suivante).

Soit à présent $k_1 > k \geqq 1$. On aura certainement $k_1 \leqq 2k$, car dans le cas contraire, $\lambda(x)$ serait nécessairement une constante et le degré de $\varrho(x)$, $m \leqq \frac{k}{k_1 - 1}$, serait nul (ce qui signifierait que

x et y sont indépendants). Donc (1) $k_1 \leqq 2k$, et (à l'exception du cas, où $k = k_1 - 1$) le degré de $\lambda(x)$ est $n = \frac{1}{2}$, et $\varrho(x)$ devra être linéaire, car son degré m satisfait à l'inégalité

$$m \leqq \frac{1}{2} + \frac{k - \frac{1}{2}}{k_1 - 1};$$

d'après ce qui précède, $\frac{\varrho(x)}{\lambda^2(x)} = b$ sera une costante. Ainsi, nous aurons, après une transformation linéaire de x,

$$\lambda(x) = \sqrt{x}, \qquad \varphi(x) = -a + b\sqrt{x},$$

et

$$\Phi_1\Big(\lambda(x)\, y - \varphi(x)\Big) = \sum_{i=1}^{i=k_1} A_i \Big[a + (y - b)\sqrt{x}\Big]^i = f\Big(x(y-b)^2\Big),$$

où f est un polynôme de degré $\frac{k_1}{2} = k$; à cause de (45), on aurait donc

$$\lambda_1^k(y) = A + B(y-b)^{2k},$$

où A et $B \gtrless 0$ sont des constantes; donc $A = 0$, d'où

$$\lambda_1(y) = (y-b)^2 B^{\frac{1}{k}},$$

et $\varphi_1(y)$ serait aussi un polynôme de degré non supérieur à 2. Finalement, après une transformation linéaire de y, on arrive à une identité de la forme

$$F(y) - F_1(x) = \sum_{i=1}^{i=k} \Big\{ B_i x^i y^{2i} - C_i \Big[xy^2 - (py^2 + qy + r)\Big]^i \Big\};$$

donc pour faire disparaitre $x^k y^{2k}$, on doit avoir $B_k = C_k$, et ensuite pour faire disparaitre successivement $x^{k-1} y^{2k}$, $x^{k-1} y^{2k-1}$ il faudra que $p = 0$, $q = 0$. Mais alors, l'identité prendrait la forme

$$F(y) - F_1(x) = F_2(xy^2),$$

ce qui exigerait qae $F(y)$ et $F_1(x)$ soient des constantes.

Donc, le seul cas encore possible est celui où $\lambda(x)$ est une constante, $k_1 - 1 = k$ et $\varphi(x)$ est une fonction linéaire. Dans ces conditions, l'identité (45) devient

---

(1) Cette conclusion subsisterait évidemment, si on admettait que $k = 1$.

$$F(y) + \Phi(\lambda_1(y)\,x - \varphi_1(y)) = F_1(x) + \Phi_1(y - ax) \qquad (45 \text{ bis})$$

et en différentiant par rapport à y

$$F'(y) + [\lambda'_1(y)\,x - \varphi'_1(y)]\,\Phi'(\lambda_1(y)\,x - \varphi_1(y)) = \Phi'_1(y - ax)$$

par conséquent,

$$k\,\lambda'_1(y)\,(\lambda_1(y))^{k-1} = C,$$

où C est une constante, d'où

$$[\lambda_1(y)]^k = Cy + d$$

et, d'après ce qui précède $k \leq 2$. Soit $k = 2$, alors

$$\varphi_1(y) = C_1 + \lambda_1(y)\,(a_1 y + b),$$

et, puisqu'on peut, sans restreindre la généralité, admettre que Φ n'a pas de terme du premier degré, il faut, pour que le coefficient de x dans le premier membre soit rationnel, poser $C_1 = 0$; il est aisé de voir que l'identité (45 bis) peut être effectivement réalisée par un choix convenable des polynômes du 3^{me} degré $F(y)$, $F_1(x)$, $\Phi_1(y - ax)$, mais cette solution est inadmissible, car x devant ainsi satisfaire à une certaine loi de Gauss, lorsque y est fixée, pourrait prendre toutes les valeurs de $-\infty$ à ∞, ce qui ne saurait avoir lieu, puisque le logarithme de sa probabilité à priori qui, à une constante près, égale $-F_1(x)$, serait positif et croîtrait indéfiniment d'un coté de l'axe réel.

Il est donc démontré que $k_1 \geq k \geq 2$.

Nous avons déjà étudié le cas de $k = k_1 = 2$ qui nous a conduit à (39). C'est le seul cas de corrélation isogéne, où les quantités x et y peuvent prendre toutes les valeurs possibles. Mais la corrélation isogéne peut se présenter aussi, lorsque 1) $k = k_1 = 1$ et 2) $k = 1$, $k_1 = 2$. Examinons la première hypothèse.

I. Dans ce cas, x et y ne pourront croître indéfiniment que dans une seule direction, et nous pouvons sans restreindre la généralité, supposer $x \geq 0$, $y \geq 0$ et

$$f_y(x) = (Ay + B)\,e^{-(Ay+B)x + Cy + D};$$

de

$$\int_0^\infty f_y(x)\,dx = 1$$

nous tirons $C = D = 0$, et de même,

$$\varphi_x(y) = (Ax + B_1)\,e^{-(Ax+B_1)y}.$$

Donc,

$$F(x, y) = P(y) \cdot (Ay + B)\, e^{-(Ay+B)x} = p(x) \cdot (Ax + B_1)\, e^{-(Ax+B_1)y} =$$
$$= he^{-(Axy + Bx + B_1 y)}, \tag{50}$$

où

$$P(y) = \frac{he^{-B_1 y}}{Ay + B}, \qquad p(x) = \frac{he^{-Bx}}{Ax + B_1},$$

en posant

$$\frac{1}{h} = \int_0^\infty \frac{e^{-B_1 y}\, dy}{Ay + B} = \int_0^\infty \frac{e^{-z}\, dz}{Az + BB_1};$$

la corrélation isogène obtenue ainsi exige seulement que $A > 0$, $B > 0$, $B_1 > 0$, et par un changement d'unités, on peut la ramener à une forme canonique, où $B = B_1 = 1$. Sans entrer dans l'étude de cette corrélation qui est d'ailleurs purement *élastique* (§ 5), remarquons que, y étant donné, la distribution de x suit une loi exponentielle simple (et réciproquement), et le valeur

$$\text{Esp. Math. } x = \frac{1}{Ay + 1}$$

montre que la ligne de regression moyenne de x (et de y) est une branche d'hyperbole.

II. Soit à présent $k = 1$, $k_1 = 2$. On aura donc

$$-\log F(x, y) = P(x, y) = x(by^2 + 2fy + l) + ay^2 + 2cy + g =$$
$$= \left(y\sqrt{bx + a} + \frac{fx + c}{\sqrt{bx + a}}\right)^2 + lx + g - \frac{(fx + c)^2}{bx + a}.$$

Il est nécessaire que $bx + a > 0$; admettons que x varie de 0 à ∞ et $a > 0$, $b > 0$. D'autre part, x étant donné, y varie de $-\infty$ à ∞, il faut donc supposer $bl - f^2 > 0$. Dans ces conditions, on aura évidemment

$$\begin{aligned}
f_y(x) &= (by^2 + 2fy + l)\, e^{-x(by^2 + 2fy + l)}, \\
P(y) &= \frac{e^{-(ay^2 + 2cy + g)}}{by^2 + 2fy + l}, \\
\varphi_x(y) &= e^{-\frac{[y(bx + a) + fx + c]^2}{bx + a}} \cdot \sqrt{\frac{bx + a}{\pi}}, \\
p(x) &= \sqrt{\frac{\pi}{bx + a}}\; e^{-\frac{Ax^2 + 2Bx + C}{bx + a}}
\end{aligned} \tag{51}$$

où la constante g est déterminée par la condition que

$$\int_{-\infty}^{\infty} P(y)\,dy = 1$$

et

$$A = lb - f^2, \qquad B = \frac{1}{2}(al + bg) - fc, \qquad C = ag - c^2.$$

On peut ramener les formules (51) à une forme canonique en faisant $a = b = 1$, $f = 0$.

Nous avons ainsi trouvé toutes les surfaces de corrélation isogène qui, comme on le voit, conduisent à quelques généralisations nouvelles de la corrélation normale.

Il serait interessant de reprendre la même question, sans supposer que $\log F(x, y)$ est un polynôme.

Naturellement l'étude de la corrélation entre plusieurs variables conduirait à des résultats analogues. Nous dirons que 3 quantités x_1, x_2, x_3 sont en corrélation *dure*, si l'une d'entre elles étant *fixée, les deux autres se trouvent en corrélation dure*. Nous obtenons immédiatement la forme unique (ayant comme cas limite la corrélation normale) généralisant la formule (10) :

$$-\log F(x_1, x_2, x_3) = Ae^{k_1x_1 + k_2x_2 + k_3x_3} + B_1 e^{k_2x_2 + k_3x_3} + \\ + \ldots + E_3 x_3 + H.$$

Mais, si on admettait en plus que la corrélation a priori entre x_1 et x_2 est dure également, la corrélation serait nécessairement *normale*.

V. FURLAN.

Sur une formule générale de la moyenne.

I.

Etant donnée une série à termes positifs (1)

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots a_n$$

dont la valeur maxima soit désignée par A et la valeur minima par a nous appellerons *moyenne* une valeur μ satisfaisant aux conditions suivantes :

1. La valeur de μ doit être déterminée d'une façon univoque c.à.d.que le procédé (algébrique ou autre) qui conduit de $a_1 , a_2 , \ldots a_n$ à μ ne doit admettre qu'une seule solution.

2. $$a < \mu < A$$

3. Si l'on désigne par s un nombre positif quelconque, la moyenne de la série

$$sa_1 , sa_2 , sa_3 , \ldots sa_n$$

doit être égale à $s\,\mu$.

4. La valeur de μ n'est pas affectée si à un terme quelconque de la série a_i on substitue un autre terme a_k et réciproquement.

Une simple vérification permet de constater que toutes les moyennes dont on se sert généralement en statistique (moyenne arithmétique, moyenne géométrique, médiane, moyenne quadratique, moyenne de densité etc.) satisfont aux conditions 1 à 4 énumérées ci-haut. Il s'agit donc bien des conditions qui doivent *nécessairement* rentrer dans la définition de la moyenne. Il serait

(1) Nous nous bornons dans cette étude à l'examen des séries à termes positifs ce qui ne constitue pas une restriction à proprement parler, puisque, dans les applications statistiques, nous pouvons toujours obtenir (par un simple changement du système des coordonnées) une série entièrement positive.

par contre très difficile, voire même impossible, d'arriver de la même façon à un système rigide de *conditions* à la fois *nécessaires* et *suffisantes*, et cela d'autant plus qu'il est devenu d'usage d'introduire dans la définition de la moyenne une série de considérations plus ou moins vagues d'ordre pratique (on exige par exemple que la moyenne se prête sans trop de difficultés au calcul, qu'elle soit facilement compréhensible etc.) dont il faudrait également tenir compte. Il semble bien que c'est une question à décider individuellement dans chaque cas particulier si la moyenne, dont on veut se servir, peut utilement être employée ou non.

Ceci posé nous pouvons distinguer *deux types de moyennes* que nous appellerons le type I et le type II. Les moyennes du type I possèdent la propriété remarquable de rester *constantes* si l'on substitue à chaque terme d'une série partielle de la série primitive la moyenne de cette série partielle. Il est facile de se convaincre que la moyenne arithmétique jouit de cette propriété. Soit

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots\ a_n$$

la série primitive et

$$a_1\,,\ a_2\,,\ a_3\,,\ \ldots\ a_i \qquad\qquad (i < n)$$

la série partielle. Désignons par

$$m = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_i}{i}$$

la moyenne arithmètique de la série partielle et par

$$M = \frac{a_1 + a_2 + a_3 + \ldots + a_n}{n}$$

la moyenne arithmétique de la série primitive, il est évident que M sera également la moyenne arithmétique de la série

$$m,\ m,\ m,\ \ldots\ m,\ a_{i+1},\ a_{i+2},\ \ldots\ a_n$$

c.à.d.de la série où les termes de la série partielle sont remplacés par la moyenne de cette série. La moyenne géométrique et la moyenne harmonique appartiennent également au groupe I.

II.

Les moyennes, autres que celles du type I, appartiennent au groupe II. Parmi celles-ci la plus importante est la *médiane*. Ici en formant des séries partielles et en remplacant les termes correspondant de la série primitive par la médiane de ces séries

partielles, on obtiendra souvent des valeurs différentes de la médiane. Soit par exemple

$$1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11 \tag{1}$$

la série primitive dont la médiane est 6. Prenons la série partielle 3, 4, 5, 6, 7 et substituons la médiane (= 5) de cette série partielle aux termes correspondant de la série primitive, et nous aurons la série

$$1, 2, 5, 5, 5, 5, 5, 8, 9, 10, 11$$

dont la médiane est 5. En choisissant d'autres séries partielles nous trouverons en définitive que la médiane de la série (1) peut varier entre 4 et 8.

Le problème de déterminer *les limites extrêmes entre lesquelles peut varier la médiane* d'une série, dont on remplace un certain nombre des termes par la médiane de ces termes ne présente aucune difficulté. Mettons

$$a_1 < a_2 < a_3 \ldots < a_n$$

et soit

$$a_1 , a_2 , a_3 , \ldots a_n \tag{2}$$

la série primitive dont la médiane est $a_{\frac{n+1}{2}}$ si n est un nombre impair et $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{2}} + a_{\frac{n}{2}+1}\right)$ si n est un nombre pair. Si $n = 3k$, k étant un nombre entier, nous pouvons former les k séries partielles à trois termes

$$\begin{matrix} a_1 , & a_2 , & a_{3k} \\ a_3 , & a_4 , & a_{3k-1} \\ a_5 , & a_6 , & a_{3k-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2k-1} , & a_{2k} , & a_{2k+1} \end{matrix} \tag{3}$$

dont les médianes seront respectivement

$$a_2 , a_4 , a_6 , \ldots a_{2k}$$

et en remplaçant tous les termes de la série (2) par les médianes des séries partielles, la médiane de la série ainsi transformée sera a_{k+1} si k est un nombre impair et $\frac{1}{2}(a_k + a_{k+2})$ si k est un nombre pair, et en substituant $\frac{n}{3}$ à k, $a_{\frac{n}{3}+1}$ ou $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{3}} + a_{\frac{n}{3}+2}\right)$

Les cas $n = 3k + 1$ et $n = 3k + 2$ peuvent être traités de la même manière. Dans le cas $n = 3k + 1$ le système (3) devient

$$\begin{array}{lll} a_1, & a_2, & a_{3k+1} \\ a_3, & a_4, & a_{3k} \\ a_5, & a_6, & a_{3k-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2k-1}, & a_{2k}, & a_{2k+2} \\ a_{2k+1} & — & — \end{array} \qquad (3')$$

dont les médianes sont

$$a_2, \quad a_4, \quad a_6, \ldots a_{2k}, \quad a_{2k+1}$$

La médiane de la série primitive dans laquelle on a remplacé les termes par les médianes des séries partielles, auxquelles ces termes appartiennent, devient dans ce cas a_{k+1}, si k est un nombre impair et, si k est un nombre pair, égale à a_{k+2}. En substituant $\frac{n-1}{3}$ à k nous obtenons ainsi $a_{\frac{n+2}{3}}$ et $a_{\frac{n+5}{3}}$. Pour $n = 3k + 2$ on aura les séries partielles

$$\begin{array}{lll} a_1, & a_2, & a_{3k+2} \\ a_3, & a_4, & a_{3k+1} \\ a_5, & a_6, & a_{3k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{2k-1}, & a_{2k}, & a_{2k+3} \\ a_{2k+1} & & \\ a_{2k+2} & & \end{array} \qquad (3'')$$

ainsi que la série des médianes

$$a_2, \quad a_4, \quad a_6, \ldots a_{2k}, \quad a_{2k+1}, \; a_{2k+2}$$

La médiane de la série transformée sera alors, si k est un nombre impair, a_{k+1} ainsi que a_{k+2} si k est un nombre pair. En remplaçant k par $\frac{n-2}{3}$ on aura $a_{\frac{n+1}{3}}$ et $a_{\frac{n+4}{3}}$.

Nous avons donc obtenu dans les trois cas considérés jusqu'ici ($n = 3k$, $n = 3k + 1$, $n = 3k + 2$) les valeurs suivantes de la médiane de la série transformée :

	n = nombre pair	n = nombre impair
$(n = 3\,k)$	$\frac{1}{2}\left(a_{\frac{n}{3}} + a_{\frac{n+6}{3}}\right)$	$a_{\frac{n+3}{3}}$
$(n = 3\,k + 1)$	$a_{\frac{n+2}{3}}$	$a_{\frac{n+5}{3}}$
$(n = 3\,k + 2)$	$a_{\frac{n+4}{3}}$	$a_{\frac{n+1}{3}}$

Si nous écrivons v pour la partie entière de $\frac{n}{3}$ (c.à.d. pour la fonction $E\left(\frac{n}{3}\right)$ de Legendre, bien connue dans la théorie des nombres) les expressions ci-dessus deviendront :

		n = nombre pair	n = nombre impair
$a)$	$(n = 3\,k)$	$\frac{1}{2}(a_v + a_{v+2})$	a_{v+1}
$b)$	$(n = 3\,k + 1)$	a_{v+1}	a_{v+2}
$c)$	$(n = 3\,k + 2)$	a_{v+2}	a_{v+1}

Puisque nous cherchons les limites extrêmes de la variation possible de la médiane, seules les expressions a) nous intéressent d'où nous pouvons conclure que la médiane de la série (2) dont on a remplacé les membres par les médianes des séries partielles à trois termes ne pourra guère être inférieure à $a_{\frac{n}{3}}$.

Mettons maintenant $n = 5\,k$, k étant un nombre entier, et considérons le système suivant des séries partielles à cinq termes :

$$\begin{array}{lllll} a_1, & a_2, & a_3, & a_{5k-1}, & a_{5k} \\ a_4, & a_5, & a_6, & a_{5k-3}, & a_{5k-2} \\ a_7, & a_8, & a_9, & a_{5k-5}, & a_{5k-4} \\ \vdots & & & & \vdots \\ a_{3k-2}, & a_{3k-1}, & a_{3k}, & a_{3k+1}, & a_{3k+2} \end{array} \qquad (4)$$

dont les médianes seront respectivement

$$a_3, \quad a_6, \quad a_9, \ldots a_{3k}$$

Si l'on remplace tous les termes de la série primitive (2) par les moyennes des séries partielles (4), la médiane de la série ainsi

transformée sera $a_{\frac{3k+3}{2}}$, si k est un nombre impair et $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{3k}{2}} + a_{\frac{3k+6}{2}}\right)$, si k est un nombre pair. En substituant $\frac{n}{5}$ à k, ces expressions deviendront $a_{\frac{3n+15}{10}}$ et $\frac{1}{2}\left(a_{\frac{3n}{10}} + a_{\frac{3n+30}{10}}\right)$. Les cas où $n = 5k + 1$ ou $5k + 2$ ou $5k + 3$ ou encore $5k + 4$ sont analogues aux cas $n = 3k + 1$ et $3k + 2$ traités plus haut. Ainsi il résulte que la médiane de la série (2) où on a remplacé tous les termes par les médianes des séries partielles à cinq termes ne pourra être inférieure a $a_{\frac{3n}{10}}$.

Si nous continuons de la même manière en faisant successivement $n = 7k$, $n = 9k$, $n = 11k$, $n = 13k$ etc. et en disposant la série primitive en séries partielles de 7, 9, 11, 13 ... termes convenablement choisis, nous trouverons que la médiane de la série transformée restera toujours inférieure à

$$a_{\frac{4n}{14}} \quad \text{resp.} \quad a_{\frac{5n}{18}} \quad \text{resp.} \quad a_{\frac{6n}{22}} \quad \text{resp.} \quad a_{\frac{7n}{26}} \quad \text{etc.}$$

Le terme général de cette dernière série étant $a_{\frac{n}{2} \cdot \frac{m}{2(m-1)}}$, nous n'avons qu'à constater que $\lim\limits_{m=\infty} \frac{1}{n} \cdot \frac{n}{2} \cdot \frac{m}{2(m-1)} = \frac{1}{4}$ pour pouvoir affirmer que la médiane de la série transformée restera toujours inférieure à $a_{\frac{n}{4}}$ et a fortiori au quartile inférieur. Si en établissant la série (2) nous avions supposé $a_1 > a_2 > \ldots > a_n$ (au lieu de $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$) nous aurions trouvé par le même procédé que la médiane de la série transformée doit toujours rester supérieure au quartile supérieur de la série primitive. Il résulte donc d'une façon générale que si dans une série nous remplaçons un nombre quelconque de termes par leur médiane respective, *la médiane de la série transformée ne pourra en aucun cas atteindre les deux quartiles de la série primitive ;* elle pourra par contre s'en approcher autant qu'il sera possible pratiquement.

Qu'il soit permis d'ajouter ici qu'on arrive à la même conclusion, quoique par un procédé beaucoup moins rigoureux, en divisant la série primitive $a_1, a_2, \ldots a_n$, où n soit égal à $4k + 1$, en deux parties

1) $a_1, a_2, \ldots a_{2k+1}$ et 2) $a_{2k+2}, a_{2k+3}, \ldots a_{4k+1}$.

La médiane de la première partie a_{k+1} devient aussi la médiane de la série entière si nous y remplaçons les termes de la série partielle 1) par leur médiane. Le quartile inférieur de la série primitive étant égal à $\frac{3}{4} a_k + \frac{1}{4} a_{k+1}$ il est évident que a_{k+1} c.à.d.la médiane de la série transformée s'en approche autant que possible.

En divisant la série de la façon suivante

$$1)\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{2k} \qquad \text{et} \quad 2)\ a_{2k+1},\ a_{2k+2},\ \ldots\ a_{4k+1},$$

et en appliquant le même raisonnement sommaire on peut arriver à la conclusion analogue pour la limite supérieure de la variation de la médiane.

Les deux quartiles ainsi que les déciles sont également des moyennes du type II, et ici aussi se pose le même problème, à savoir quelles sont les limites extrêmes entre lesquelles peuvent varier ces moyennes en remplaçant les termes de la série primitive par la moyenne correspondante des séries partielles. Nous croyons cependant inutile d'insister ici sur ce point que l'on peut aisément éclaircir par un procédé identique à celui employé plus haut pour la médiane.

Nous appellerons *moyennes erratiques* les moyennes du type II.

III.

Passons maintenant aux moyennes du type I que l'on pourra appeler *moyennes fixes*. Si l'on étudie d'une façon plus approfondie les moyennes de ce type, c.à.d.les expressions satisfaisant à la fois aux conditions générales de la moyenne (conditions 1 à 4 indiquées dans le chap. I de cette étude) ainsi qu'à la condition ultérieure de rester constantes si dans la série primitive on remplace un nombre quelconque de ses termes par la moyenne de la série partielle ainsi obtenue, on est amené à la fonction suivante :

$$\left(\frac{g_1 a_1^t + g_2 a_2^t + \ldots + g_n a_n^t}{g_1 + g_2 + \ldots + g_n}\right)^{\frac{1}{t}} \qquad (5)$$

$g_1, g_2, \ldots g_n$ étant des nombres entiers quelconques et t un paramètre variable, pouvant varier entre $-\infty$ et ∞. En supposant

$g_1 = g_2 = \ldots = g_n = 1$ la fonction (5) devient

$$M(t) = \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} \tag{6}$$

que nous appellerons la *formule générale des moyennes du type I*, étant donné que *les trois moyennes classiques ne sont que des cas particuliers de M*, correspondant aux valeurs $+1, 0$ et -1 du paramètre variable t. On a, en effet, pur $t = 1$

$$M(1) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n}$$

la moyenne arithmétique, pour $t = -1$

$$M(-1) = \left(\frac{a_1^{-1} + a_2^{-1} + \ldots + a_n^{-1}}{n}\right)^{-1}$$

$$= \left(\frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}{n}\right)^{-1}$$

$$= \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \ldots + \frac{1}{a_n}}$$

la moyenne harmonique, et pour $t = 0$ à la suite de

$$\lim_{t=0} M(t) = \lim_{t=0}\left(\frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t=0}\left(\frac{e^{t\log a_1} + e^{t\log a_2} + \ldots + e^{t\log a_n}}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= \lim_{t=0}\left(1 + \frac{t}{n}\log(a_1 a_2 \ldots a_n)\right)^{\frac{1}{t}}$$

$$= e^{\frac{\log(a_1 a_2 \ldots a_n)}{n}} = \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

la moyenne géométrique.

La fonction $M(t)$ possède entre autres les trois qualités suivantes : a) elle est une fonction continue de t entre $t = -\infty$ et $t = \infty$; b) elle est une fonction toujours croissante et décroissante avec t (1) ; c) elle devient égale à a (c.à.d. à la valeur minima des termes de la série $a_1, a_2, \ldots a_n$) pour $t = -\infty$ et égale à A

(1) Voir à ce sujet: MINKOWSKI: *Geometrie der Zahlen*, Leipzig, 1896.

(c.à.d. à la valeur maxima de la série envisagée) pour $t = \infty$ (1). La formule (6) embrasse ainsi toutes les moyennes d'une série quelconque $a_1, a_2, \ldots a_n$. A chaque valeur de t correspond une moyenne de la série et vice-versa à chaque moyenne (du type I et du type II) correspond une valeur de t. La valeur du paramètre t peut varier cependant suivant la série envisagée, ce qui est toujours le cas pour les moyennes du type II (moyennes *erratiques*); si elle est constante, indépendamment de la série, il s'agit nécessairement d'une moyenne du type I (moyennes *fixes*).

Il est, en effet, évident qu'une moyenne $M(t)$ est, pour une valeur $t = \tau$ quelconque, une moyenne du type I. Soit $a_1, a_2, \ldots a_n$ la série primitive et $a_1, a_2, \ldots a_i$ la série partielle. On aura alors

$$M(\tau) = \left(\frac{a_1^\tau + a_2^\tau + \ldots + a_n^\tau}{n}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

la moyenne de la série primitive et

$$m = \left(\frac{a_1^\tau + a_2^\tau + \ldots + a_i^\tau}{i}\right)^{\frac{1}{\tau}}$$

la moyenne de la série partielle. Si l'on forme la serie

$$m, m, m, \ldots m, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots a_n$$

où aux termes de la série partielle on a substitué leur moyenne m, la moyenne de cette série est égale à

$$\left(\frac{i\, m^\tau + a^\tau_{i+1} + \ldots + a^\tau_n}{n}\right)^{\frac{1}{\tau}} = M(\tau), \text{ q. e. d.}$$

---

(1) Soit $a_n = A$ la valeur maxima de la série. Si l'on désigne

$$\frac{a_1}{a_n} \text{ par } \alpha_1, \ \frac{a_2}{a_n} \text{ par } \alpha_2, \ldots \frac{a_{n-1}}{a_n} \text{ par } \alpha_{n-1}$$

on aura

$$M(t) = A\left(\frac{1 + \alpha_1^t + \alpha_2^t + \ldots + \alpha^t_{n-1}}{n}\right)^{\frac{1}{t}} = Ae^{\frac{1}{t}\log\frac{1 + \alpha_1^t + \alpha_2^t + \ldots + \alpha^t_{n-1}}{n}}$$

et ensuite de $\alpha_1 < 1$, $\alpha_2 < 1$, $\ldots \alpha_{n-1} < 1$ $\lim\limits_{t=\infty} M(t) = A$. Observons, en outre, que pour une valeur de t quelconque $M(t)$ de $a_1, a_2, \ldots a_n$ est égale à $\frac{1}{M(-t)}$ de la série des réciproques $\frac{1}{a_1}, \frac{1}{a_2}, \ldots, \frac{1}{a_n}$, d'où il ressort que si $M(t)$ égale A pour $t = \infty$, on doit avoir $\lim\limits_{t=-\infty} M(t) = a$.

La fonction (6) est une fonction génératrice des moyennes du type I.

Parmi les fonctions de $M(t)$ il y en a qui représentent aussi des moyennes de la série $a_1, a_2, \ldots a_n$. Ainsi par exemple les fonctions U_1, U_2 et U_3 ci-après sont des moyennes du type II, k étant un nombre positif et entier quelconque :

$$U_1 = \frac{M(0) + M(1) + M(2) + \ldots + M(k)}{k}$$

$$U_2 = \sqrt[k]{M(0) \cdot M(1) \cdot M(2) \cdot \ldots \cdot M(k)}$$

$$U_3 = \frac{M(0) + \sqrt{M(0)\,M(1)} + \sqrt[3]{M(0)\,M(1)\,M(2)} + \ldots \sqrt[k]{M(0)\,M(1)\,M(2)\ldots M(k)}}{k}$$

Par contre il est évident que la médiane ne peut être exprimée en fonction de $M(t)$, $M(t')\ldots$ Mettons $M(t) = m_0$, $M(t') = m_1$, $M(t'') = m_2 \ldots$ et observons que la médiane $a_{\frac{n+1}{2}}$ ne changera pas si dans la série donnée nous remplaçons un terme quelconque $a_i\left(\text{où } i \neq \frac{n+1}{2}\right)$ par $a_i + d\,a_i$ où $d\,a_i$ signifie une quantité très petite. Si $a_{\frac{n+1}{2}} = \varphi(m_0, m_1, \ldots)$ était une fonction de $m_0, m_1, \ldots,$ nous aurions donc $\frac{d\varphi}{d\,m_0} = 0$, $\frac{d\varphi}{d\,m_1} = 0$, $\frac{d\varphi}{d\,m_2} = 0, \ldots$ ce qui est en contradiction avec notre hypothèse. La même observation s'applique à la moyenne de densité qui, elle aussi, ne peut être exprimée en fonction de $M(t)$, $M(t')\ldots$ autrement que sous forme d'identité.

IV.

Qu'il soit permis d'illustrer ce que nous venons de dire par un exemple. Prenons le *referendum obligatoire en Suisse* (concernant les projets constitutionnels émanant de l'Assemblée fédérale) de 1848 à 1924. Le vote des Etats dans ces 43 votations populaires a donné les résultats suivants :

N.	DATE de la votation	VOTE des Etats		N.	DATE de la votation	VOTE des Etats	
		Acceptants	Rejetants			Acceptants	Rejetants
1	1848	15 1/2	6 1/2	23	1895 Novembre	4 1/2	17 1/2
2	1866 Janvier	9 1/2	12 1/2	24	1897 Juillet	16	6
3	» »	12 1/2	9 1/2	25	1897 Juillet	18 1/2	3 1/2
4	» »	8	14	26	1898 Novembre	16 1/2	5 1/2
5	» »	9	13	27	1898 Novembre	16 1/2	5 1/2
6	» »	10	12	28	1902 Novembre	21 1/2	1/2
7	» »	11	11	29	1903 Octobre	4	18
8	» »	6 1/2	15 1/2	30	1905 Mars	21 1/2	1/2
9	» »	9 1/2	12 1/2	31	1908 Juillet	21 1/2	1/2
10	» »	9 1/2	12 1/2	32	1908 Octobre	21 1/2	1/2
11	1872 Mai	9	13	33	1913 Mai	16 1/2*	4 1/2*
12	1874 Avril	14 1/2	7 1/2	34	1914 Octobre	18	4
13	1879 Mai	14	8	35	1915 Juin	22	0
14	1880 Octobre	4 1/2	17 1/2	36	1917 Mai	14 1/2	7 1/2
15	1882 Juillet	7 1/2	14 1/2	37	1919 Mai	22	0
16	1885 Octobre	15	7	38	1919 Mai	20	2
17	1887 Juillet	20 1/2	1 1/2	39	1919 Août	21 1/2	1/2
18	1890 Octobre	20 1/2	1 1/2	40	1920 Mai	11 1/2	10 1/2
19	1891 Juillet	18	4	41	1921 Mai	15 1/2	6 1/2
20	1891 Octobre	14	8	42	1921 Mai	20 1/2	1 1/2
21	1894 Mars	7 1/2	14 1/2	43	1923 Juin	10	12
22	1895 Septembre	7 1/2	14 1/2				

(*) A Schwyz, les « oui » et les « non » ont été égaux.

Le nombre des Etats acceptants et rejetants est égal à 22 (19 cantons et 6 demi-cantons), sauf dans la votation de 1913 (la consultation populaire dans le canton de Schwyz ayant conduit à un nombre strictement égal des « Oui » et « Non »). Considérons maintenant la série qui résulte en prenant, pour chaque votation, le nombre des Etats ayant voté dans le sens de la majorité, donc 15 $^1/_2$ pour la votation No. 1, 12 $^1/_2$ pour la votation No. 2 et ainsi de suite. En multipliant ces termes par 2 nous obtenons la série suivante :

N.o		N.o		N.o		N.o		N.o	
1	31	10	25	19	36	28	43	37	44
2	25	11	26	20	28	29	36	38	40
3	25	12	29	21	29	30	43	39	43
4	28	13	28	22	29	31	43	40	23
5	26	14	35	23	35	32	43	41	31
6	24	15	29	24	32	33	33	42	41
(1) 7	22	16	30	25	37	34	36	43	24
8	31	17	41	26	33	35	44		
9	25	18	41	27	33	36	29		

Il n'est pas douteux que voulant construire une moyenne de cette série, nous arrêterions notre choix à la moyenne arithmétique. Pour illustrer cependant ce que nous venons de dire sur la fonction $M(t)$, nous avons calculé directement les valeurs de $M(t)$ pour

$$t = 0, \frac{1}{3}, \frac{1}{2}, \pm 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 20, 50, 100, 500, 1000$$

ce qui nous permet d'évaluer au besoin les valeurs de la fonction $M(t)$ pour les valeurs intermédiaires de t avec un degré d'approximation suffisant. On trouvera réunies dans le tableau ci-contre les valeurs de M correspondant aux valeurs diverses du paramètre t. On constatera que $t = -\frac{5}{3}$ correspond à 31, c.à.d.à la médiane,

(1) Egalité des Etats acceptants et rejetants.

t		M (t)
∞	A (= maximum de la série)	44,0
1000		43,9
500		43,7
100		42,8
50		41,9
20		39,9
10		37,7
9		37,3
8		36,9
7		36,4
6		35,9
5		35,4
4	moyenne biquadratique	34,8
3	moyenne cubique	34,1
2	moyenne quadratique	33,5
1	moyenne arithmétique	32,8
$\frac{1}{2}$		32,4
$\frac{1}{3}$		32,3
0	moyenne géométrique	32,1
— 1	moyenne harmonique	31,4
— 2		30,8
— 3		30,2
— 4		29,7
— 5		29,2
— 6		28,7
— 7		28,3
— 8		28,0
— 9		27,7
— 10		27,4
— 20		25,5
— 50		23,7
— 100		22,8
— 500		22,2
— 1000		22,1
— ∞	a (= minimum de la série)	22,0

et que les valeurs de M pour $t = 1000$ et $t = -1000$ ne s'écartent que insensiblement de $A = 44$ et $a = 22$, c.à.d.des valeurs maxima er minima de la série. L'écart n'est en effet que de 2 pour mille environ entre A et M (1000) et de 5 pour mille entre a et M (— 1000). Le quartile inférieur ($= 27\,^1/_2$) correspond dans notre cas à M (— 10,3).

Applications à l'étude de la variabilité.

V.

Soit $a_1, a_2, \ldots a_n$ une série que nous avons caractérisée par une moyenne m convenablement choisie. Comme il y a une infinité de séries à n termes ayant la même moyenne m, il se peut que nous trouvions désiderable d'ajouter à cette première mesure de la série donnée une deuxième, puis une troisième etc. Nous pourrions, à cet effet, calculer une deuxième moyenne m', indépendante de la premiere, puis toujours selon une formule différente, une troisième et ainsi de suite.

Mais nous pouvons également procéder d'une autre manière, en partant du fait qu'une série quelconque $a_1, a_2, \ldots a_n$ peut toujours être déterminée par la série des différences successives de ses termes. On pourra donc compléter la première caractéristique de la série, fournie par la moyenne m, en y ajoutant une fonction des premières différences des termes $a_1, a_2, \ldots a_n$ de la série, puis éventuellement une fonction des deuxièmes différences etc. C'est ce procédé qui, pour différentes raisons, a prévalu en statistique. Toutefois on s'est limité jusqu'à présent aux premières différences auxquelles on a rattaché un certain nombre des fonctions appelées *mesures de dispersion* on de *variabilité*.

Pour aborder le sujet d'un point de vue général observons qu'entre les n termes d'une série il y a $n(n-1)$ différences dont $n-1$ indépendantes. Un système indépendant des différences des termes de la série sera par exemple le système suivant :

$$a_1 - a_2\,,\ a_2 - a_3\,,\ \ldots\ a_{n-1} - a_n$$

ou bien le systéme :

$$a_1 - a_3\,,\ a_2 - a_4\,,\ \ldots\ a_{n-2} - a_n\,,\ a_{n-1} - a_1$$

ou bien encore :

$$a_1 - a_2\,,\ a_1 - a_3\,,\ a_1 - a_4\,,\ \ldots\ a_1 - a_n$$

A l'aide d'un système indépendant de $n-1$ différences nous pouvons toujours calculer toutes les $n(n-1)$ différences des n termes de la série. Ceci posé il est évident que l'ensemble des n différences

$$R-a_1, \quad R-a_2, \ldots R-a_n$$

c.à.d. des écarts des termes de la série d'un nombre donné quelconque R peut utilement remplacer un systeme de $n-1$ différences indépendantes entre les termes de la série ; dans ce cas on prend généralement (mais pas nécessairement) pour R une moyenne de la série donnée.

Nous appellerons l'ensemble des différences $a_i - a_k$ *variabilité des termes de la série envisagée.* En vertu de cette définition l'étude de la variabilité d'une série n'est autre chose que l'étude des premières différences de ses termes. La différence $a_i - a_k$ pouvant être considérée comme équivalant à $a_k - a_i$, nous avons donc pour chaque série à n termes $\frac{n(n-1)}{2}$ différences constituant la variabilité de la série. Toutes les différences $a_i - a_k$ étant égales à zero, nous dirons que la variabilité $= 0$; ceci sera le cas seulement si tous les termes de la série en question sont égaux. Nous dirons, en outre, que la variabilité d'une serie $sa_1, sa_2, \ldots sa_n$ (s étant un nombre positif quelconque) est s fois plus grande que la variabilité de la série $a_1, a_2, \ldots a_n$.

Pour mesurer la variabilité d'une série à l'aide d'un seul chiffre on a proposé un nombre considérable de fonctions des différences $a_i - a_k$ ou bien des écarts $R - a_i$, mais dans les applications pratiques on n'en emploie qu'un nombre assez restreint. Toutes ces mesures, celles qu'on emploie et celles qu'on a proposées mais qu'on n'emploie pas, possèdent leurs propriétés particulières ; mais ce qu'il importe avant tout c'est d'établir la relation exacte qui existe entre ces mesures et ce que nous avons appelé la variabilité. En d'autres termes il s'agit de fixer un *critérium* pour décider *si et jusqu'à quel point* une fonction que l'on propose comme mesure de la variabilité peut être considérée comme étant un bon indice de l'ensemble des différences $a_i - a_k$.

Nous avons dit plus haut que, par définition, la variabilité d'une série dont tous les termes sont égaux est égale à zéro. De là à conclure que la variabilité d'une série diminue si quelques-

uns de ses termes deviennent égaux, n'est qu'un pas. Il est, en effet, assez évident si l'on compare les deux séries

$$a_1, a_2, \ldots a_n \quad \text{et} \quad m, m, \ldots m, a_{i+1}, \ldots a_n$$

que la variabilité des termes de la seconde série est moindre que celle de la première. Dans le premier cas nous avons $n(n-1)$ différences toutes différentes, dans le second par contre $i(i-1)$ différences égales à zero, et en plus i fois $2(n-i)$ différences égales entre elles et le reste de $(n-i)(n-i-1)$ différences coïncidant exactement avec $(n-i)(n-i-1)$ différences que nous trouvons également parmi les $n(n-1)$ formant la variabilité de la premiere série. Il semble donc à première vue raisonnable de dire que la variabılité de $a_1, a_2, \ldots a_n$ est plus grande que celle de $m, \ldots m, a_{i+1} \ldots a_n$. Cependant il y a une distinction à faire. Prenons par exemple la série des nombres naturels

$$1, 2, 3, 4, \ldots . 12 \qquad (1)$$

et remplaçons les termes 1, 2, 3 une fois par 2 et puis une autre fois par 1000. Nous obtiendrons ainsi les deux séries ;

$$2, 2, 2, 4, 5, \ldots . 12 \qquad (2)$$

et

$$1000, 1000, 1000, 4, 5, \ldots . 12 \qquad (3)$$

S'il semble assez évident que la variabilité de la série (1) est plus grande que celle de la série (2), il serait assez difficile de soutenir que la variabilité de (1) est plus grande que celle de (3). Cette différence d'appréciation provient de ce que dans (2) nous avons substitué aux termes $a_1, a_2, \ldots a_i$ une moyenne de ces termes, dans (3) une valeur non-moyenne. Nous préciserons donc le critérium à formuler de la manière suivante :

Soit V une fonction des termes de la série $a_1, a_2, \ldots a_n$ et V' la même fonction d'une série $m, m, \ldots m, a_{i+1}, \ldots a_n$ c.à.d.d'une série où aux termes $a_1, a_2, \ldots a_i$ d'une série partielle *quelconque* on à substitué une moyenne m de sorte que la même moyenne, calculée pour $a_1, a_2, \ldots a_n$ soit égale à la moyenne correspondante de $m, m, \ldots m, a_{i+1}, \ldots a_n$; V sera alors un bon indice de la variabilité de $a_1, a_2, \ldots a_n$ dans la même mesure dans laquelle la relation

$$V' < V$$

sera remplie.

Ceci admis il est évident que pour pouvoir utilement employer une mesure de la variabilité il est nécessaire de toujours ajouter

la moyenne par rapport à laquelle elle remplit cette condition (*moyenne-base*). Ce n'est qu'après avoir arrêté le choix de la moyenne dont on veut se servir qu'il convient, dans les applications pratiques, d'aborder l'étude de la variabilité.

Il est inutile d'ajouter que V doit en outre remplir les deux conditions que nous avons formulées plus haut, c.à.d. : 1) $V = 0$ pour $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, et 2) la variabilité de la série $sa_1, sa_2, \ldots sa_n$ doit être égale à sV si V désigne la variabilité de $a_1, a_2, \ldots a_n$.

VI.

La mesure de la variabilité que l'on emploie le plus souvent est *l'écart quadratique moyen*. L'ensemble des n différences $m_0 - a_1$, $m_0 - a_2, \ldots m_0 - a_n$, où par m_0 on désigne la moyenne arithmétique des termes de la série, forme ici ce que nous avons appelé le système indépendant de differences, et l'écart quadratique moyen n'est que la moyenne quadratique de ces n différences. La préférence donnée à cette mesure de la variabilité est intimement liée à des considérations se rattachant au calcul des probabilités dont il ne sera pas question ici. Nous nous bornerons simplement à constater que indépendamment de cela l'écart quadratique moyen est une bonne mesure de la variabilité si l'on prend pour moyenne-base la moyenne arithmétique. En effet, soit $a_1, a_2, \ldots a_i$ la série partielle dont la moyenne arithmétique soit designée par m. Les deux séries

$$a_1, a_2, \ldots a_n \quad \text{et} \quad m, m, \ldots m, a_{i+1}, a_{i+2}, \ldots a_n$$

ont la même moyenne arithmétique (la moyenne arithmétique étant une moyenne de première catégorie). Nous avons donc

$$V = \sqrt{\frac{(m_0 - a_1)^2 + (m_0 - a_2)^2 + \ldots (m_0 - a_n)^2}{n}}$$

$$\text{et } V' = \sqrt{\frac{i\,(m_0 - m)^2 + (m_0 - a_{i+1})^2 + \ldots + (m_0 - a_n)^2}{n}}$$

et par conséquence

$$n\,(V^2 - V'^2) = (m_0 - a_1)^2 + (m_0 - a_2)^2 + \ldots + (m_0 - a_i)^2 - i\,(m_0 - m)^2$$
$$= \sum_1^i{}_k\, a^2_k - 2\, m_0 \sum_1^i{}_k\, a_k + 2\, i m_0\, m - i m^2$$

Or les deux termes moyens de cette dernière expression sont égaux,

et quant à la difference $\sum_1^i k\, a^2_k - im^2$ on peut démontrer qu'elle n'est jamais négative :

$$\sum_1^i k\, a^2_k - im^2 = a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a^2_i - i\left(\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_i}{i}\right)^2$$
$$= a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_i^2 - \frac{1}{i}(a_1^2 + a_2^2 + \ldots + a_i^2 + 2\, a_1 a_2 + + 2\, a_1 a_3 + \ldots + 2\, a_{i-1} a_i)$$
$$= \frac{1}{i}\left\{(a_1 - a_2)^2 + (a_1 - a_3)^2 + \ldots + (a_{i-1} - a_i)^2\right\} \geqq 0 \cdot$$

Il s'ensuit donc que (les termes a_1, a_2, .. a_i n'étant pas tous égaux entre eux) $n\,(V^2 - V'^2) > 0$ ou bien $V > V'$, q. e. d.

Les considérations précédentes nous permettent d'envisager une généralisation intéressante de l'écart quadratique moyen que l'on désigne communément par σ. Partons de la relation bien connue :

$$\sigma^2 = M^2(2) - M^2(1) = \{M(2) - M(1)\}\{M(2) + M(1)\}$$

Nous pouvons démontrer (1) que le facteur $M(2) - M(1)$ constitue à lui seul, une bonne mesure de la variabilité, (2) que toute différence $M(t) - M(1)$ est une bonne mesure de la variabilité par rapport à la moyenne arithmetique comme moyenne-base, $(t > 1)$ et (3) que toute différence $M(t) - M(t')$ (pour $t' < t$) constitue une bonne mesure de la variabilité par rapport à $M(t')$ comme moyenne-base. Il nous suffit de démontrer la proposition (3), les deux autres n'étant que des cas particuliers de cette dernière.

Soit a_1, a_2, ... a_n la série donnée et a_1, a_2, ... a_i la série partielle dont nous prenons la moyenne

$$m = M(t') = \left(\frac{a_1^{t'} + a_2^{t'} + \ldots + a_i^{t'}}{i}\right)^{\frac{1}{t'}},$$

Désignons $M(t) - M(t')$ par S. Nous aurons donc :

$$S = \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} - \left(\frac{a_1^{t'} + a_2^{t'} + \ldots + a_n^{t'}}{n}\right)^{\frac{1}{t'}}$$

et

$$S_0 = \left(\frac{im^t + a^t_{i+1} + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} - \left(\frac{im^{t'} + a^{t'}_{i+1} + \ldots + a_n^{t'}}{n}\right)^{\frac{1}{t'}}$$

Constatons d'abord que $S = 0$ pour $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$, que S devient sS si nous remplaçons a_1, a_2, ... a_n par sa_1, sa_2, ... sa_n et que la fonction M étant une moyenne du type I, $M(t')$ de $a_1, a_2, \ldots a_n$ n'a pas changé ensuite de la substitution de m à a_1, a_2, ... a_i. Ce

qu'il faut encore démontrer c'est que $S_0 < S$. Par la définition même de $M(t)$ les deux expressions

$$\left(\frac{a_1^{t'} + a_2^{t'} + \ldots + a_n^{t'}}{n}\right)^{\frac{1}{t'}} \text{ et } \left(\frac{im^{t'} + a^{t'}_{i+1} + \ldots + a_n^{t'}}{n}\right)^{\frac{1}{t'}}$$

sont égales. La différence $S - S_0$ se réduit donc à

$$\left(\frac{a_1^{t} + a_2^{t} + \ldots + a_n^{t}}{n}\right)^{\frac{1}{t}} - \left(\frac{im^{t} + a^{t}_{i+1} + \ldots + a_n^{t}}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

La fonction $M(t)$ étant une fonction croissante de son argument ainsi qu'il a été dit plus haut, nous avons ensuite de $t > t'$

$$m = \left(\frac{a_1^{t'} + a_2^{t'} + \ldots + a_i^{t'}}{i}\right)^{\frac{1}{t'}} < \left(\frac{a_1^{t} + a_2^{t} + \ldots + a_i^{t}}{i}\right)^{\frac{1}{t}}$$

et pour $t > 0$

$$i\,m^t < a_1^t + a_2^t + \ldots + a_i^t$$

$$\frac{i\,m^t + a^t_{i+1} + \ldots + a_n^t}{n} < \frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n}$$

et enfin

$$\left(\frac{i\,m^t + a^t_{i+1} + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} < \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

donc $S - S_0 > 0$. Pour $t < 0$ nous aurons

$$i\,m^t > a_1^t + a_2^t + \ldots + a_i^t$$

$$\frac{i\,m^t + a^t_{i+1} + \ldots + a_n^t}{n} > \frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n}$$

et pareillement

$$\left(\frac{i\,m^t + a^t_{i+1} + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}} < \left(\frac{a_1^t + a_2^t + \ldots + a_n^t}{n}\right)^{\frac{1}{t}}$$

et nous arrivons à la même conclusion $S - S_0 > 0$.

D'après ce que nous venons de démontrer l'expression

$$M(1) - M(0) = \frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} - \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \ldots \cdot a_n}$$

c.à.d. la différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique serait une bonne mesure de la variabilité en prenant la moyenne géométrique comme moyenne-base. Prenons comme exemple la série des nombres naturels de 1 à 10 dont $M(1) = 5{,}5$ et $M(0) = 4{,}53$, ce qui donne $V = M(1) - M(0) = 0{,}97$. Formons maintenant la série partielle 1, 5, 7, 8 dont la moyenne géométrique sera 4,09 et remplaçons ces quatre termes dans la série de

1 à 10 par 4,09. La différence entre la moyenne arithmétique et la moyenne géométrique de la série ainsi transformée sera $V' = 0,51$. En partant de la série partielle 1, 2, 3, 4 nous aurions trouvé $V' = 0,85$, en partant de 4, 6, 9, 10, $V' = 0,80$ et en partant de 6, 7, 8, $V' = 0,96$. Dans tous les cas V' résulte $< V$.

Ce que nous venons d'exposer nous permets de construire une infinité de mesures de la variabilité d'une série par rapport à une infinité de moyennes-base. Le cas limite de la formule $M(t) - M(t')$ nous est donné pour $t = \infty$, $t' = -\infty$ et $V = A - a$, c.à.d. par la différence entre la valeur maxima et la valeur minima de la série (ou en d'autres termes par l'amplitude absolue de l'oscillation des termes de la série). En ne considérant que les mesures de la variabilité ayant pour moyenne-base la moyenne arithmétique, le cas-limite se présente sous la forme de $V = M(\infty) - M(1) = A - M(1)$, c.à.d. de la différence entre la valeur maxima et la moyenne arithmétique de la série. Inutile de dire que ces cas-limite ne peuvent être employés comme mesures de la variabilité qu'en vue d'une première approximation. Pour arriver à l'écart quadratique moyen nous n'avons qu'à partir de son *facteur actif* $M(2) - M(1)$. En multipliant cette différence par $M(2) + M(1)$, nous obtenons un produit $M^2(2) - M^2(1)$ où le critérium que nous avons formulé plus haut est également rempli, vu que la démonstration donnée tout à l'heure pour $M(t) - M(t')$ s'applique sans autre à $M(t) + M(t')$. Cependant le produit $M^2(2) - M^2(1)$ n'est pas une mesure de la variabilité puisq'il devient $s^2(M^2(2) - M^2(1))$ pour la série $sa_1, sa_2, \ldots sa_n$ au lieu de $s(M^2(2) - M^2(1))$, comme nous l'avions exigé. Cet inconvénient disparaît immédiatement si nous prenons la racine carrée de $M^2(2) - M^2(1)$. Ainsi nous obtenons la formule célèbre $\sigma = \sqrt{M^2(2) - M^2(1)}$. Mais au lieu de prendre la racine carrée nous aurions pu également diviser par $M(1)$ ce qui nous aurait conduit à la formule

$$\sigma' = \frac{M^2(2) - M^2(1)}{M(1)} = \frac{M^2(2)}{M(1)} - M(1)$$

qui pourrait remplacer avantageusement, toujours les considérations spéciales dérivant du calcul des probabilités mises à part, l'écart quadratique moyen. Les valeurs de σ et σ' sont reliées entre elles par les relations

$$\sigma = \sqrt{M(1)\,\sigma'} \qquad \text{et} \qquad \sigma' = \frac{\sigma^2}{M(1)}$$

Notons en passant qu'il y a une affinité plus grande entre σ et σ' en ce sens que la mesure relative de la variabilité (le coefficient de la variabilité d'après Pearson) qu'on obtient en exprimant V en pour 100 d'une moyenne m est, si l'on prend pour m la moyenne arithmétique M (1)

$$\text{pour } \sigma \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 100 \sqrt{\frac{M^2(2)}{M^2(1)} - 1}$$

$$\text{et pour } \sigma' \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad 100 \left(\frac{M^2(2)}{M^2(1)} - 1 \right)$$

Dans le cas spécial étudié au Chap. IV nous obtenons pour $\sigma = 6{,}7$ et pour $\sigma' = 1{,}4$.

VII.

Qu'il soit permis d'ajouter quelques mots concernant les deux autres mesures de la variabilité les plus répandues : l'écart simple moyen et la demi-différence des quartiles. On obtient *l'écart simple moyen* en partant de la moyenne arithmétique m_0 ou, mieux encore, de la médiane m_1, et en formant le système indépendant des différences $m_0 - a_1$, $m_0 - a_2$, ... $m_0 - a_n$ ou $m_1 - a_1$, $m_1 - a_2$, ... $m_1 - a_n$ dont on prend ensuite la moyenne arithmétique des valeurs absolues. Dans les deux cas on arrive à une mesure de la variabilité V qui devient égale à zéro si tous les termes de la série sont égaux entre eux et égale à sV pour sa_1, sa_2, ... sa_n. Examinons maintenant dans quelle mesure le critérium que nous avons formulé plus haut est rempli. Si l'on prend l'écart simple moyen à partir de la moyenne arithmétique

$$V = \frac{\sum_1^n{}_k \mid m_0 - a_k \mid}{n}$$

et si l'on remplace les termes de la série partielle a_1, a_2, ... a_i par leur moyenne arithmétique m', l'écart simple moyen de la série ainsi transformée deviendra

$$V' = \frac{i \mid m_0 - m' \mid}{n} + \sum_{i+1}^n{}_k \frac{\mid m_0 - a_k \mid}{n}$$

La différence

$$n(V - V') = \sum_1^i{}_k \mid m_0 - a_k \mid - i \mid m_0 - m' \mid$$

sera égale à zéro toutes les fois que les termes a_1, a_2, ... a_i sont tous plus grands ou tous plus petits que m_0, ou, en d'autres termes,

si les différences $m_0 - a_1$, $m_0 - a_2$, ... $m_0 - a_i$ sont toutes positives (ou en partie égales zéro) ou toutes négatives (ou en partie égales zéro) ; elle est par contre nécessairement positive, s'il y en a des positives et des négatives. On arrive au même résultat si l'on remplace m_0 par la médiane m_1 ; il faut cependant dans ce cas éviter de confondre la moyenne-base, c.à.d. la moyenne par rapport à laquelle nous analysons le caractère de la mesure de la variabilité, avec la moyenne dont on part pour calculer l'écart simple moyen. La seule moyenne-base, par rapport à laquelle il est pratiquement opportun d'examiner de près l'écart simple moyen est, pour des raisons qu'il nous conduirait trop loin d'exposer ici, la moyenne arithmétique. Par contre il est préférable, ainsi qu'il a été prouvé depuis longtemps, de calculer l'écart simple moyen à partir de la médiane.

Nous voyons donc que l'écart simple moyen (à partir de la médiane ou de la moyenne arithmétique ou de toute autre moyenne) est une mesure de la variabilité moins sensible que l'écart quadratique moyen où la différence $V - V'$ était *toujours* positive tandis que pour l'écart simple moyen elle n'est que positive *ou* zéro. Or nous avons dit plus haut que V est un bon indice de la variabilité de a_1, a_2, ... a_n dans la même mesure dans laquelle la relation $V' < V$ est remplie. Nous n'avons donc qu'à calculer exactement le pourcentage des cas, dans lesquels la condition $V' < V$ est satisfaite, par rapport à l'ensemble des cas possibles, et nous aurons une idée sur la valeur de l'écart moyen simple comme mesure de la variabilité. Etant donné la série à n termes a_1, a_2, ... a_n supposons que $n = 2k + 1$ et que l'écart simple moyen soit calculé à partir de la médiane a_{k+1}. Combien de séries partielles peut-on former en tout ? Evidemment $\binom{n}{2}$ séries à deux termes, $\binom{n}{3}$ séries à trois termes etc., et $\binom{n}{n-1}$ séries à $n - 1$ termes ; en tout donc

$$\binom{n}{2} + \binom{n}{3} + \ldots + \binom{n}{n-1} = 2^n - n - 2$$

Ceci pour le nombre des cas possibles. Il s'agit maintenant de calculer le nombre des cas favorables à $V - V' > 0$. Cette différence n'est pas positive si les i termes d'une série partielle à i termes sont tous $\leqq a_{k+1}$ ou tous $\geqq a_{k+1}$. Il nous faut donc déduire du total des cas possibles le nombre des séries partielles que l'on peut

former a) avec les termes $a_1, a_2, \ldots a_{k+1}$ et b) avec les termes $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots a_n$, ce qui fait au total $2\,[2^{k+1} - (k+1) - 2]$ cas défavorables. Le pourcentage des cas favorables au total des cas possibles est donc

$$\pi = 100\left(1 - \frac{2\,[2^{k+1} - (k+1) - 2]}{2^n - n - 2}\right)$$

Le calcul de π nous donne pour $n = 11$ $\pi = 94{,}5$ et pour $n = 21$ $\pi = 99{,}8$. Nous voyons donc que pour une série à plus de vingt termes l'écart simple moyen pris à partir de la médiane est pratiquement une mesure da la variabilité (par rapport à la moyenne arithmetique comme moyenne-base) non moins sensible que l'écart quadratique moyen.

La *demi-différence des quartiles* $V = \frac{q_3 - q_1}{2}$ ne peut être étudiée d'une façon absolument identique à l'écart moyen simple. Ici aussi nous avons $V = 0$, si tous les termes de la série sont égaux entre eux et nous obtenons sV si nous multiplions tous les termes de la série donnée par s. En appliquant notre critérium à cette mesure quelque peu sommaire de la variabilité on trouvera qu'il y a lieu de distinguer trois cas: $V' < V$, $V' = V$ et même $V' > V$, et ceci que l'on prenne pour moyenne-base la moyenne arithmétique ou, ce qui semble plus indiqué, la médiane. Ici aussi nous pouvons, comme il a été fait pour l'écart moyen simple, établir le pourcentage des cas favorables à $V' < V$ par rapport aux cas possibles c.à.d. au nombre total des séries, toutefois avec une restriction importante, résultant du fait que dans un nombre considérable des cas il n'est guère possible de décider d'une façon générale si la substitution de la moyenne des termes d'une série partielle aux termes mêmes de la série donnée conduit à $V' < V$, $V' = V$ on à $V' > V$. Les trois éventualités peuvent se réaliser, et tout dépend de la valeur numérique des termes $a_1, a_2, \ldots a_n$. Il convient donc d'ajouter à l'étude générale du problème l'examen de différentes catégories spéciales des séries. Nous nous contenterons d'avoir effleuré cette question qui n'a qu'une importance secondaire vu que l'intérêt se rattachant à la demi-différence des quartiles réside plutôt dans la facilité avec laquelle elle se prête au calcul dans les applications pratiques que dans sa valeur intrinsèque comme mesure de la variabilité.

MARIO SAIBANTE

La concentrazione della popolazione.

Uno degli scopi più attraenti dello studio quantitativo della società umana consiste nel determinare in essa delle regolarità le quali comprovino l'esistenza di leggi costanti nel tempo e nello spazio, dominanti la sua vita.

Malgrado l'ampiezza delle ricerche fin qui svolte e l'abbondante messe di risultati in questo campo ottenuti restano pur sempre dei lati inesplorati nei quali si possono determinare regolarità fino ad ora sfuggite all'osservazione scientifica, oppure dare precisa formulazione a fatti uniformi le cui leggi furono soltanto intuite ed accennate.

Uno di tali lati è rappresentato dalla distribuzione nelle varie nazioni degli agglomerati umani.

Con la parola agglomerati intendiamo significare quei gruppi di popolazione i cui componenti per ragioni sia di origine, sia di necessità di esistenza, vivono su un territorio relativamente ristretto in condizioni tali da far considerare i gruppi stessi come unità collettive nettamente differenziabili le une dalle altre.

A chi osservi la popolazione di un territorio esteso, quale è quello di uno Stato essa non si presenta come uniformemente distribuita su tutta la sua superficie ma bensì addensata diversamente nelle varie parti di esso, in generale, raggruppata in tante formazioni di varia densità.

Sono appunto tali formazioni che chiamiamo col termine generico di agglomerati.

Esse constano di due parti: un nucleo centrale, costituito da un gruppo più o meno numeroso di case strettamente addossate l'una all'altra, formanti nel loro complesso un sol tutto, ed una striscia di territorio circostante, meno densamente popolata, giuridicamente ed economicamente subordinata al nucleo principale.

Secondo che si prenda in considerazione soltanto il nucleo principale o l'intera formazione al termine generico di agglomerati si potrà dare due significati distinti: quello materiale di centro urbano propriamente detto, e quello giuridico-amministrativo di comune.

In ogni Stato di tali agglomerati ne esiste un numero diverso, ed essi sono straordinariamente diversi tra loro sia per estensione sia per ammontare di abitanti.

Se noi li distribuiamo in ordine di grandezza, potremo constatare che il loro numero varia in senso inverso alla loro popolosità: è grande per quelli minori e diventa sempre più piccolo quanto più grandi diventano le loro dimensioni.

È interessante ora vedere come si sviluppi questa scala di distribuzione e stabilire se essa segua un determinato principio ordinatore il quale sia applicabile a tutte le nazioni oppure sia regolata solo dal caso e si svolga senza legge.

L'ipotesi dell'esistenza di una legge fissa di distribuzione degli agglomerati umani fu già prospettata da diversi autori i quali cercarono anche di darle una espressione matematica attraverso la quale fosse possibile determinare valori che caratterizzassero la distribuzione stessa nei vari Stati (1).

Prescindendo dal valore significativo dei risultati da questi ottenuti è nostra intenzione di determinare, partendo dall'ipotesi da essi avanzata dell'esistenza di una legge costante di distribuzione, la reale portata di questa e dare ad essa una formulazione precisa la quale ci permetta di determinare le costanti che la caratterizzano nelle varie nazioni e dieno nel contempo una misura dell'intensità di concentrazione delle popolazioni contenute nel complesso degli agglomerati.

Che alla distribuzione degli agglomerati sia strettamente connessa l'intensità della concentrazione della popolazione, è intuitivo.

Infatti, intendendo per concentrazione un aspetto della distribuzione dei fenomeni per cui un carattere dicesi tanto più concentrato quanto maggiore è la parte di esso rappresentata dai casi in cui il suo ammontare è più alto, in confronto a quella rappresentata dal totale dei casi, si capisce facilmente che a seconda che in una data nazione il numero delle città diminuisca più o meno intensamente in corrispondenza all'aumentare della loro grandezza, il numero degli abitanti che sul complesso di essi sarà contenuto dalle città maggiori in confronto a quelli contenuti nelle città minori varierà e notevolmente, determinando pure notevoli variazioni di concentrazione.

---

(1) F. Auerbach. *Das Gesetz der Bevölkerungskonzentration.* Petermann's Mitteilungen 1913, pag. 74.

A. Lotka. *Elements of phisical biology* - Part. III. Chapter XX, pag. 306.

La misura delle diversità di concentrazione presenta un alto interesse in quanto, dal fatto che le popolazioni sieno nelle singole Nazioni più o meno intensamente concentrate, dipendono elementi molteplici che sostanziano la vita delle Nazioni stesse.

In ogni modo intorno all'importanza di questo studio discorreremo più particolareggiatamente in appresso. Per ora riassumendo quanto abbiamo detto in queste pagine introduttive potremo affermare che lo scopo del presente lavoro è duplice: da un lato esso tende ad accertare l'esistenza di una legge di distribuzione valevole per tutte le nazioni, dall'altro a misurare in base ad essa la maggiore o minore concentrazione delle loro popolazioni.

Un'altra cosa ci preme stabilire invece fin d'ora, sopratutto per evitare equivoche e false interpretazioni a cui non sfuggirono altri autori: la necessità di tener ben distinti i due significati della parola: agglomerati.

Come dicemmo precedentemente con la parola agglomerati si possono indicare due specie diverse d'unioni di uomini: una materiale costituita dalle città e da consimili riunioni di case ed una topografico-amministrativa costituita dai Comuni.

È indispensabile fare ben chiara questa distinzione in quanto le differenze tra le distribuzioni che si ottengono considerando le une e quelle che si ottengono considerando gli altri sono sostanziali e tali che qualora studiando le popolazioni delle diverse nazioni, di queste diversità non si tenesse conto si correrebbe il rischio di ottenere risultati completamente sbagliati.

Queste differenze derivano principalmente dal fatto che mentre gli agglomerati del primo tipo contengono solo una parte della popolazione dello Stato, quella urbana, e solo ad essa quindi si riferisce la misura della concentrazione; quelli del secondo tipo comprendono tutta la popolazione dello Stato stesso.

Esse si estrinsecano col dare caratteri ed aspetti quantitativi assai diversi alle due distribuzioni. Il più rimarchevole fra questi riguarda i limiti di validità della legge di distribuzione: mentre per i comuni essa è valida per tutta la seriazione senza alcun limite di massima o di minima, per i centri urbani propriamente detti, come più sotto vedremo, essa è valida soltanto al disopra di un determinato limite inferiore, cioè soltanto per le città aventi un numero d'abitanti superiore ad un determinato limite, il quale varia fra nazione e nazione, ma in generale può ritenersi corrispondente ai centri con almeno duemila abitanti: sotto queste limite, dopo il quale

gli agglomerati, salvo poche eccezioni, perdono le caratteristiche di centri urbani, essi non seguono più la legge generale ma si distribuiscono senza alcun ordine.

Queste differenze ci impongono di considerare separatamente i due tipi di distribuzione e determinare separatamente le leggi che li caratterizzano e pure separatamente misurare la concentrazione.

Determineremo così due leggi che chiameremo l'una quella che prende in considerazione soltanto le popolazioni urbane, legge di concentrazione dell'urbanesimo, l'altra più generale, che prende in considerazione tutta la popolazione delle singole nazioni, legge di concentrazione delle popolazioni.

Sia la determinazione dell'una che quella dell'altra hanno importanza non lieve nello studio delle popolazioni.

L'importanza della prima è di valore sopratutto demografico, in quanto tende a mettere in luce le differenti caratteristiche della distribuzione dell'urbanesimo nei singoli Stati cioè la maggiore o minore tendenza delle popolazioni urbane ad accentrarsi in città grandi od a frazionarsi nei centri minori.

L'importanza dell'altra è invece anche di carattere sociologico in quanto tende a mostrare come si sviluppano i diversi gruppi geografici di popolazione di cui consta la Nazione.

Ciò è evidente, perchè il comune non è un'entità astratta creata per puro artificio di legge, ma è un'entità concreta che trova la sua ragion d'essere nella comunione d'origine dei singoli abitanti; inoltre le differenti caratteristiche di vita degli abitanti dei comuni grandi in confronto dei piccoli, la differente funzione sociale degli uni e degli altri fa sì che dal variare della proporzione dei diversi gruppi fra loro dipendano sotto molteplici punti di vista, molte delle caratteristiche intellettuali, economiche, di civiltà peculiari alle varie nazioni.

Pertanto avvertiamo sin d'ora il lettore che il nostro studio si dividerà in due parti: una dedicata all'esame dei centri urbani propriamente detti; l'altra dedicata invece all'esame delle popolazioni complessive dei singoli stati ripartite nelle entità amministrative Comuni.

Venendo ora a parlare della legge di distribuzione delle popolazioni urbane potremo fissare come punto di partenza che ogni Nazione comprende un numero diverso di città di varia grandezza, numero che dipende nel medesimo tempo dall'ampiezza del territorio

della Nazione, dall'ammontare complessivo dei suoi abitanti, dalla maggiore o minore tendenza di quelle popolazioni all'urbanesimo.

Queste città, intendendo come più su dicemmo con questa parola riferirci a quei gruppi di abitazioni strettamente addossate l'una all'altra formanti un'entità complessiva che dà ai suoi abitanti quelle caratteristiche di abitudini e di vita che sono proprie delle popolazioni urbane, sono in ogni Nazione di varie dimensioni e di varia importanza: si va dalle agglomerazioni più piccole costituite dal semplice gruppo di case, a quelle maggiori di villaggio, alla cittadina, alla città di media importanza, alla città grande ed alla metropoli. Di ciascuno di questi tipi di agglomerazione in ogni nazione se ne trova un numero diverso il quale generalmente è piccolissimo per le metropoli (una o due al massimo, spesso nessuna) e diventa sempre più grande quanto più si arretra nella scala di importanza.

Come dicemmo è nostra intenzione dimostrare ampiamente quanto già affermarono altri autori, che questa graduatoria d'importanza assume sempre la medesima forma in tutti i paesi.

Trascurando i centri inferiori ai duemila abitanti — la cui popolazione, perde il carattere di popolazione urbana per assumere quello di popolazione rurale, essendo la mutua convivenza solo accidentale, ed il regime di vita della gran maggioranza della popolazione più rurale che urbano — noi potremo riunire i singoli centri in altrettanti gruppi i quali, per quanto grossolanamente, corrispondono ai vari gradi della loro importanza. Otterremo così una distribuzione delle città per la quale ci si convincerà facilmente che il numero di esse andrà sempre più assottigliandosi quanto più si salirà verso i più alti gradi.

Riportiamo a mo' d'esempio la distribuzione delle città italiane così ottenuta:

Numero delle città Italiane secondo la loro importanza.

Limite abitanti	N. città
2.000 – 3000	869
3.000 – 5.000	700
5.000 – 10.000	377
10.000 – 20.000	183
20.000 - 50.000	93
50.000 – 100.000	21
oltre 100.000	14

Rappresentando tali distribuzioni, per tutte le nazioni per cui ci fu possibile raccogliere dati, su un diagramma a coordinate cartesiane in cui sull'asse delle ascisse, venne posto il valore (A) del numero limite degli abitanti e sull'asse delle ordinate il numero (N) delle città aventi una popolazione superiore a questo limite, abbiamo potuto constatare che nella gran maggioranza dei casi la curva risultante conservava sempre la medesima forma iperbolica, distribuendosi la successione dei dati secondo la formula

$$N = \frac{K}{A^{\alpha}}$$

che ridotta in logaritmi corrisponde all'altra

$$\log. N = \log. K - \alpha \log. A$$

rappresentabile mediante una retta.

In ambedue le formule K ed α sono costanti, da determinarsi caso per cosa ed α essendo il coefficiente di interpolazione che esprime l'intensità di variazione nel passaggio dall'una all'altra classe potrà essere assunto come simbolo generico della distribuzione.

Numero delle città al disopra di un determinato limite e rispettivi logaritmi, Italia 1921.

A Limite	N N. Città	Logaritmi A	Logaritmi N
2.000	2257	3.3010300	3.3535316
3.000	1388	3.4771213	3.1423895
5.000	688	3.6989700	2.8375884
10.000	311	4.0000000	2.4927604
20.000	128	4.3010300	2.1072100
50.000	35	4.6989700	1.5440680
100.000	14	5.0000000	1.1461280

Come dicemmo, la rappresentazione grafica della distribuzione delle città fatta in questa maniera, per un gran numero di nazioni ci diede risultati sufficientemente concordanti: su 19 Nazioni esaminate in ben 17 la curva del numero delle città mostrò di seguire con buona approssimazione la formula sopra indicata.

Per cui si potrà affermare che nelle varie Nazioni la distribuzione delle città, secondo il numero dei loro abitanti segue una legge costante, tale che l'ammontare di esse in funzione al loro limite si distribuisce secondo una linea iperbolica ed i rispettivi logaritmi secondo una linea quasi retta, in maniera che la costante che caratterizza l'una e l'altra può essere assunta come simbolo di questa distribuzione. Nella tabella seguente sono esposti i valori di α calcolati nelle 17 Nazioni per cui avevamo dati e che mostravano di addattarsi alla legge sopra indicata.

Valori di α nelle singole Nazioni.

NAZIONI	Anno di rilevazione	α
Confederazione Australiana	1921	0,82
Finlandia	1923	0,94
Canadà	1920	0,98
Cile	1920	1,01
Stati Uniti	1921	1,03
Inghilterra	1911	1,04
Germania	1925	1,11
Danimarca	1925	1,13
Svezia	1920	1,17
Jugoslavia	1921	1,17
Francia	1921	1,24
Italia	1921	1,29
Polonia	1921	1,36
Olanda	1921	1,39
Spagna	1921	1,45
Belgio	1921	1,45
India Inglese	1921	1,68

Come si vede da questi dati, α nel complesso varia poco da Nazione a Nazione; esso, fra quelle da noi considerate, oscilla dal minimo di 0.82 nella Confederazione Australiana al massimo di 1.68 nell'India Britannica.

Sul significato concreto dell'indice α come misura della concentrazione dei fenomeni, sorsero molte discussioni quando il PARETO (1) ne propose l'applicazione allo studio delle distribuzioni dei redditi.

Prevalse però l'opinione formulata prima dal BENINI (2) e poi sostenuta — in base alle relazioni fra l'indice stesso ed un altro indice che più sotto esamineremo, pure atto a misurare la distribuzione dei redditi — dal GINI (3), che l'aumentare del valore di α significhi diminuzione della concentrazione del fenomeno e viceversa il suo diminuire aumento di essa.

Accettando questa interpretazione e tenendo presente (come fu dimostrato dagli studi dei citati autori) che a piccolissime variazioni di α corrispondono intensissime variazioni della concentrazione potremo concludere che nelle 17 Nazioni considerate la distribuzione delle città in funzione al numero dei loro abitanti pur restando sempre eguale nella forma, varia in intensità in maniera assai rilevante, mostrando con ciò che le popolazioni urbane delle singole nazioni sono assai differentemente concentrate.

Se però il metodo su esposto è atto a mettere in luce l'esistenza di una legge costante di distribuzione delle città in funzione al numero dei loro abitanti, ed a dare una misura della diversa intensità con cui tale legge si sviluppa nelle singole Nazioni, non è però sufficiente a darci una misura della concentrazione che possa permettere confronti esatti fra le Nazioni stesse.

Molti rilievi intorno al valore descrittivo dell'indice α così determinato furono fatti in occasione delle sue applicazioni alla distribuzione dei redditi.

Del suo significato se ne occupò in maniera particolare il GINI (4)

---

1) V. PARETO, *Cours d'économie*. Lausanne.

2) R. BENINI, *Principii di statistica metodologica*. U. T. E. T.

3) C. GINI, *Indici di concentrazione e di dipendenza*. Biblioteca degli Economisti, V Serie, Vol. XX.

4) Cfr. C. GINI, *Indici di concentrazione e di dipendenza*, op. cit., pag. 48 e segg. Le principali osservazioni sono le seguenti:

a) Esso è atto a ritrarre la distribuzione del fenomeno solo al disopra di

il quale pur riconoscendo l'importanza che la determinazione di tale indice ebbe per lo studio della distribuzione di alcuni fenomeni, fece intorno ad esso osservazioni tali da limitare notevolmente il suo valore come misura della concentrazione.

Nel caso specifico della sua applicazione alla seriazione degli agglomerati urbani i difetti dell'indice α si fanno sentire in maniera ancor più sensibile.

La circostanza che più influisce a renderne incerta la validità come misura della concentrazione è data dal fatto che il numero delle città nelle varie Nazioni essendo assai basso (minore di quello dei redditieri), è necessario raggrupparle in classi di estensione piuttosto vasta in maniera che spesso nella stessa classe figurano con la stessa importanza città di numero assai diverso di abitanti, per es. da 50.000 a 99.999, diversità di numero che sfugge completamente nel calcolo dell'indice α.

L'influenza di questo fatto si fa sentire in maniera grave soprattutto per le città al disopra del limite massimo le quali necessariamente hanno un'importanza numerica di abitanti straordinariamente diversa fra loro e tale che una di esse può essere (per es. in Inghilterra, negli Stati Uniti) non solo 10 volte, ma talora, 20, 30 volte più grande delle altre.

Ad ovviare a questo e ad altri inconvenienti abbiamo ritenuto opportuno attenerci nella determinazione della concentrazione ad un'altra forma di calcolo la quale — non trascurando la forma della distribuzione — tenesse conto oltre che del numero delle città, anche anche dell'ammontare preciso dei loro abitanti.

Abbiamo all'uopo adottato l'indice proposto dal Gini come misura della concentrazione dei redditi il quale nel medesimo tempo serve a caratterizzare le forme della distribuzione ed a misurare con sufficiente esattezza, tenendo conto oltre che del numero dei redditi anche dell'ammontare effettivo dei redditi, la concentrazione.

---

un determinato limite. Non si misura dunque mediante esso la distribuzione di tutto il fenomeno ma soltanto di una sua parte.

b) Esso è poco sensibile. Notevoli differenze di distribuzione del fenomeno rimangono appena avvertite dai valori di α specialmente se questi sono bassi

c) Esso non ha un significato preciso come misura della concentrazione. Dal fatto che la disuguaglianza di distribuzione (cioè il variare da classe a classe) aumenti col suo aumentare, si arguisce che ad ogni diminuzione di esso corrisponde un aumento della concentrazione. Ma la reale misura di questo aumento non vi è maniera mediante esso di valutarla.

L'A al proposito dimostrò che graduando n entità omogenee secondo un dato carattere quantitativo A in maniera che $a_1, a_2, a_3, \dots a_m \dots a_n$ esprimessero le intensità del carattere A nelle singole entità, e fosse $a_1 \gtrdot a_2, a_2 \gtrdot a_3; \dots$ ecc., l'intensità media del carattere A in tutte le n entità sarebbe: $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n}{n}$ mentre l'intensità media delle m entità con intensità maggiore, cioè tali che sia $a_m > a_n$, sarebbe; $\dfrac{a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_m}{m}$, le quali espressioni danno luogo alla disuguaglianza:

$$\frac{a_1 + a_2 + a_3 \dots a_n}{n} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_m}{m}$$

corrispondente all'altra:

$$\frac{m}{n} < \frac{a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_m}{a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n}$$

Evidentemente, tanto più forte è questa disuguaglianza tanto più forte è la concentrazione del carattere in quanto essa significa che tanto maggiore sul numero totale delle entità considerate è il numero di quelle che hanno un'intensità superiore ad un dato limite.

Per cui determinando una costante che misuri questa disuguaglianza per tutti i valori che assume nella seriazione considerata, essa da un'ottima misura della concentrazione del fenomeno.

Il Gini, per i redditi, i quali seguono una legge di distribuzione molto simile a quella del fenomeno dell'urbanesimo che stiamo esaminando, dimostrò che fra due termini della disuguaglianza corre la relazione:

$$\left(\frac{a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_m}{a_1 + a_2 + a_3 \dots + a_n}\right)^{\delta} = \frac{m}{n}$$

in cui δ può essere assunto come indice di concentrazione in quanto essendo l'esponente a cui bisogna inalzare la frazione che il numero sità totale del carattere rappresenta l'intensità dei casi in cui essa è superiore ad un dato limite, per ottenere la frazione che il numero dei casi a cui essa si riferisce rappresenta sul totale generale dei casi, tanto più esso sarà elevato, tanto maggiore sarà la concentrazione del fenomeno.

Tenendo conto del fatto che alla distribuzione del numero delle città in funzione all'ammontare dei rispettivi abitanti, — come a quella

dei redditi — è applicabile l'indice α il quale, a quanto determinò pure il GINI, è legato a δ da una relazione costante, abbiamo cercato di vedere se essa si adattasse pure alla formula di δ.

I risultati ottenuti, per tutte le Nazioni per cui avevamo dati, furono davvero soddisfacenti e mostrarono chiaramente l'applicabilità della formula stessa.

Per cui chiamando N il numero complessivo delle città ed A_n la somma dei loro abitanti, N_i il numero delle città superiori ad un determinato limite di abitanti, ed A_i il numero degli abitanti contenuto nella N_i città esistenti al disopra di questo limite, la misura della concentrazione dell'urbanesimo è data dalla formula:

$$\frac{N_i}{N} = \left(\frac{A_i}{A_n}\right)^\delta$$

per tutti i valori che N_i può assumere nella seriazione considerata.

Nella tavola seguente sono esposti i risultati ottenuti applicando detta formula alla seriazione delle città Italiane.

Numero delle città Italiane ed ammontare dei loro abitanti al disopra dei vari limiti.

Limiti	N. Città	Ammontare abitanti
100.000	14	4.607.200
50.000	35	5.863.809
20.000	128	8.541.112
10.000	311	11.174.831
5.000	688	13.753.909
3.000	1388	16.459.023
2.000	2257	18.567.382

$$\frac{14}{2257} = \left(\frac{4.607.200}{18.567.382}\right)3.65 \qquad \frac{311}{2257} = \left(\frac{11.174.831}{18.567.382}\right)3.84$$

$$\frac{35}{2257} = \left(\frac{5.863.809}{18.567.382}\right)3.62 \qquad \frac{688}{2257} = \left(\frac{13.752.909}{18.567.382}\right)3.97$$

$$\frac{128}{2257} = \left(\frac{8.541.112}{18.567.382}\right)3.70 \qquad \frac{1388}{2257} = \left(\frac{16.459.023}{18.567.382}\right)4.07$$

Valore medio di $\delta = 3.80$

Come si vede quindi per la seriazione delle città Italiane la formula di concentrazione del GINI è sufficientemente esatta e la media dei risultati con essa ottenuti dà una misura abbastanza precisa della concentrazione stessa.

Lo stesso può dirsi anche per le altre nazioni; per alcune però l'approssimazione — pur restando tale da non togliere il valore del risultato — è meno buona.

Il che ci consiglia di attenerci nel calcolo di δ al sopra citato sistema, non ad altro sistema più breve pure escogitato dal GINI ma che però per essere esatto ha bisogno di una grande approssimazione della formula per tutti i termini della seriazione (1).

---

1) Il GINI, sempre riguardo alla seriazione dei redditi, dimostrò che in quei casi in cui l'approssimazione della sua formula di concentrazione è così buona che δ rimane invariato per tutti i valori di m, esso allora coincide con il coefficiente di interpolazione della retta che si ottiene rappresentando in un diagramma a coordinate cartesiane i logaritmi dei redditieri in funzione dei logaritmi dei redditi.

Infatti la formula $\frac{N_i}{N} = \left(\frac{A_i}{A_n}\right)^\delta$ può ridursi per comodità di calcolo alla seguente:

$$\log. N_i - \log. N = \delta\ (\log. A_i - \log. A_n)$$

da cui si deduce l'altra:

$$\log. N_i = \delta \log. A_i - ([\delta \log. A_n] - \log. N)$$

per cui ponendo $(\delta \log. A_n) - \log. N = K$ che resta costante per tutti i valori della seriazione si ottiene:

$$\text{Log.}\ N_i = \delta \log. A_i - \log. K$$

che è l'espressione algebrica della retta dei log. di A_i in funzione di quelli di N_i, e δ ne è il rispettivo coefficiente.

Nella tavola seguente sono riassunti i valori di δ calcolato per le varie Nazioni.

Valore di δ nelle varie nazioni (1).

NAZIONE	Anno di rilevazione	δ
Confederazione Australiana	1925	10,82
Canadà	1921	6,09
Cile	1920	5.97
Stati Uniti d'America	1920	5,85
Germania	1925	5.37
Danimarca	1921	4,93
Svezia	1921	4,40
Inghilterra	1921	4,40
Finlandia	1923	4,38
Francia	1921	4,19
Italia	1921	3,80
Polonia	1920	3.77
Olanda	1921	3,50
Belgio	1921	3,22
India	1921	2,43

I dati di questa tavola mostrano che contrariamente a quanto avveniva per α il cui valore oscillava appena fra un massimo di 0.82 ed un minimo di 1.68, i valori di δ variano in maniera assai notevole da Nazione a Nazione. Ciò conferma quanto dicemmo relativamente alle forti differenze che presenta la concentrazione dell'urbanesimo nelle varie nazioni.

Basta tener presente che malgrado δ sia più sensibile di α tuttavia a piccole differenze di δ corrispondono grandi variazioni della concentrazione (mentre per $\delta = 2$ una metà della popolazione è contenuta da un quarto delle città, per $\delta = 3$ essa è contenuta da un

1) Non fu possibile calcolare i valori di δ per la Spagna e per la Jugoslavia, perchè per queste nazioni trovammo nelle fonti ufficiali soltanto i dati relativi al numero delle città, non quelli dell'ammontare preciso dei loro abitanti.

ottavo; per $\delta = 5$ essa è contenuta da 1/32) per comprendere quanto forti sieno le differenze di concentrazione delle popolazioni urbane nelle nazioni esaminate.

Nel complesso i risultati ottenuti con questa forma di calcolo concordano abbastanza soddisfacentemente con quelli di α, pur dando una misura assai più espressiva della concentrazione.

Calcolando la cograduazione fra la graduatoria ascendente dei valori di δ e quella discendente dei valori di α, essa assume un valore di $+ 0.79$, mostrando con ciò di essere assai forte.

La principale anomalia è rappresentata dalla Finlandia; trattandosi però della Nazione che ha il numero minore di città è da presumersi che essa sia dovuta alla scarsa sensibilità di α ed all'influenza che ha su esso il fatto già rilevato dell'ampiezza delle classi in confronto al numero delle città.

Le lievi discordanze incontrate tuttavia non infirmano il principio dell'applicabilità dei due indici, per cui potremo concludere che dall'esame da cui abbiamo assoggettato le seriazioni del numero città in funzione all'ammontare dei loro abitanti, risulta chiaramente dimostrata l'esistenza di una legge generale di distribuzione, valida per tutte le Nazioni, a cui si può dare anche espressioni diverse, le quali però, sono concordi nel mettere in luce che, se la forma della distribuzione resta costante, l'intensità delle differenze nel numero delle città di diversa grandezza e quindi l'intensità della concentrazione varia e notevolmente.

Prima di passare all'esame analitico delle differenze di concentrazione nelle singole Nazioni abbiamo voluto saggiare un'altra forma di calcolo per vedere se essa confermasse i risultati precedentemente ottenuti.

Fummo indotti a ciò, oltre che da considerazioni di carattere generale, anche dal fatto che se, nella gran maggioranza delle Nazioni, la distribuzione delle città in funzione al numero dei loro abitanti, segue le leggi sopra esposte da cui può desumersi la misura della concentrazione, pur tuttavia in alcune essa non vi si uniforma.

Per queste, — tra cui figurano la Russia e la Norvegia, che non possono considerarsi, specialmente la prima, come Nazioni di secondaria importanza, e che non possono venir trascurate nello studio comparativo della concentrazione urbana nelle varie nazioni — si presentava la necessità assoluta di adottare una forma di calcolo

che misurasse la concentrazione delle popolazioni urbane indipendentemente dalla forma della distribuzione.

In conseguenza di ciò abbiamo esteso tale calcolo anche alle Nazioni prima considerate anzitutto per rendere possibile la comparazione della concentrazione delle ultime, poi per vedere, se, prescindendo dalla forma di distribuzione si giungeva nella determinazione dell'intensità di concentrazione a risultati concordanti con quelli ottenuti tenendo conto di questa forma e per potere dal loro confronto farsi un'idea più precisa dell'espressività e del significato delle diverse misure ottenute.

Fra i vari sistemi atti a misurare la concentrazione di un carattere indipendentemente dalla forma della sua distribuzione, abbiamo preferito attenerci al calcolo del *rapporto di concentrazione* del GINI, che fu largamente applicato allo studio dei più svariati fenomeni ottenendo sempre ottimi risultati (1).

---

1) C. GINI, *Sulla misura della concentrazione e della variabilità dei caratteri* in Atti del Reale Istituto Veneto di Scienze, Lettere ed Arti, Anno 1913-14, Tomo LXXIII, Part. II.

Se A_i è il numero degli abitanti delle i città con abitanti sotto un determinato limite, ed A_n il numero complessivo degli abitanti delle n città, la frazione $\frac{i}{n}$ mostrerà la parte che sul totale delle n città rappresentano le città con più basso numero di abitanti, e la frazione $\frac{A_i}{A_n}$ la parte che sul totale degli abitanti rappresentano gli abitanti delle città più piccole.

Poichè si verifica sempre $\frac{i}{n} > \frac{A_i}{A_n}$ e la concentrazione sarà tanto maggiore quanto più piccola è la parte che sull'ammontare totale del carattere spetta a quei casi in cui l'intensità di esso non è superiore ad un determinato limite, una misura della concentrazione è data dalla differenza:

$$\frac{i}{n} - \frac{A_i}{A_n}$$

E poichè tale differenza è tanto più alta in valore relativo quanto più alto è il rapporto

$$r = \frac{\frac{i}{n} - \frac{A_i}{A_n}}{\frac{i}{n}}$$

una media ponderata degli $n - 1$ valori di r in cui ogni r entri con un peso proporzionale al proprio $\frac{i}{n}$ esprimerà con sufficiente approssimazione la misura della concentrazione per tutti i valori della serie.

Il rapporto di concentrazione lo abbiamo calcolato sulle seriazioni di tutte le Nazioni per cui avevamo già calcolato i valori di δ, e, mediante certe ipotesi suggerite dal GINI, anche su quelle delle Nazioni relativamente alle quali, per mancanza dei dati sul numero esatto degli abitanti delle città di ogni classe, fu possibile calcolare α e non δ (1).

Tale media è data appunto dal rapporto di concentrazione del Gini:

$$R = \frac{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n} - \frac{A_i}{A_n}}{\sum_{i=1}^{n-1} \frac{i}{n}}$$

Tale rapporto cresce col crescere della concentrazione, è uguale a O nel caso di equidistribuzione del carattere, a $+1$ nel caso di concentrazione massima.

Poichè però nel caso in esame non si conoscono tutte le entità del carattere, ma queste sono raggruppate in classi piuttosto ampie, la misura della concentrazione si ottiene mediante l'applicazione della formula:

$$R' = \frac{\sum_{k=1}^{r} (i_k + i_{k-1} - 1) S_k}{(n-1) A_n} - 1$$

in cui r è il numero delle classi, K il numero d'ordine di esse, i_k il numero dell quantità inferiori al limite superiore l_k della classe Kma, i_{k-1} il numero delle quantità inferiori al limite inferiore i_{k-1} della classe stessa, S_k la somma delle quantità rientranti nella classe K.

Il GINI dimostrò che è sempre $R' < R$, ma che però, in ogni modo quando abbiasi un numero abbastanza grande di classi, di comprensione non troppo diversa tra loro, R' può ritenersi come un valore sufficientemente approssimato di R.

Una maggiore approssimazione di R si ottiene integrando R' in base a certe ipotesi.

Buoni risultati nel caso presente diede la fo.mula proposta dal Gini:

$$R'' = \frac{1}{n-1\, A_n} \left(\sum_{k-1}^{r} [i_k + i_{k-1} - 1]\, S_k + \frac{1}{6} [p_k^2 - 1]\, c_k \right) - 1$$

in cui p_k indica il numero delle quantità contenute in ogni classe, e c_k è uguale a $l_k - l_{k-1}$.

Bisogna tener però presente che questa formula può a volte dare un valore di R'' approssimato per eccesso a R'.

1) C. GINI, *Op cit.* — Quando le statistiche danno per ogni classe solo il valore di f_k e non quello di S_k, si può determinare un valore approssimato di R, supponendo che, per ogni classe, l'intensità media corrisponda alla semisomma dei limiti estremi.

Posto $S_k = \frac{1}{2} f_k\ (l_k - l_{k-1})$ e quindi $A_n = \sum_{k=1}^{r} f_k\ (l_k + l_{k-1})$

Esponiamo nella tavola seguente i valori che R assume nelle varie Nazioni.

Valori ⁰/₀ del Rapporto di Concentrazione nelle varie Nazioni (1).

NAZIONI	Anno di rilevazione	R
Confederazione Australiana	1924	83,84
Stati Uniti d'America	1920	75,71
Cile	1920	75,70
Canadà	1921	73,58
Inghilterra	1911	72,79
Norvegia	1921	72,19
Russia	1921	71,72
Germania.	1924	71,03
Finlandia	1920	70,27
Svezia	1921	69,44
Danimarca	1920	68,99
Rumenia	1920	67,87
Jugoslavia.	1921	66,27
Francia	1920	66,03
Italia.	1921	63,30
Polonia	1921	56,74
Spagna	1921	51,93
India	1921	51,51

I risultati di questo calcolo, i quali confermano quanto dicemmo nei paragrafi precedenti, relativamente alle profonde differenze esistenti fra l'intensità della concentrazione delle popolazioni urbane

---

la formula prima esposta che dava R'' diventa:

$$R'' = \frac{\sum_{k=1}^{r} (i_k + i_{k-1} - 1)\, f_k\, (l_k + l_{k-1}) + \frac{1}{3}\,(f_k^2 - 1)\, c_k}{(n-1) \sum_{k=1}^{r} f_k\, (l_k + l_{k-1})} - 1$$

1) Per l'Olanda ed il Belgio non ci fu possibile calcolare il rapporto di concentrazione in quanto per queste nazioni non potemmo avere che i dati relativi alle città superiori ai 20.000 ab.

nei vari stati, concordano in maniera abbastanza sodisfacente con quelli degli altri indici prima applicati; la congraduazione fra la graduatoria di α e quella di R è di $+ 0.88$, che mostra la loro ottima concordanza. Analogamente la congraduazione fra δ ed R è di $+ 0.79$, che per quanto inferiore è essa pure abbastanza forte per mostrare una stretta concordanza di risultati fra i due sistemi di calcolo.

Tali concordanze — alle quali fa eccezione di qualche importanza soltanto la Finlandia che nella graduatoria di α occupa posti ben diversi da quelli occupati nella graduatoria degli altri due indici — ci permettono di giungere a risultati conclusivi riguardo alla concentrazione dell'urbanesimo nelle varie Nazioni.

Potremo intanto rilevare come prima cosa, che detta concentrazione è assai più forte nei paesi dei Nuovi Continenti che in quelli Europei.

Essa raggiunge il suo massimo nella Confederazione Australiana, nella quale la popolazione si concentra quasi totalmente nelle capitali dei singoli gruppi confederali.

Vengon poi, con valori, poco diversi tra loro, le tre grandi unità Americane per cui ci fu possibile avere dati: gli Stati Uniti, il Cile, il Canadà.

I Paesi del continente Europeo, invece, seguono tutti a distanze abbastanza rilevanti, messe in evidenza specialmente dalle differenze di valore dell'indice δ, che per seriazioni come quelle da noi prese in esame, riteniamo il più rappresentativo ed il più atto ad una esatta valutazione della concentrazione.

In questi il valore della concentrazione varia assai fra gli uni e gli altri. In generale si può dire che la concentrazione è assai maggiore nelle nazioni del Nord che in quelle del Sud, in quelle di razza Anglo-Sassone che in quelle di razza Slava, in queste piuttosto che in quelle di razza Latina.

Il basso valore infine, che i vari indici assumono per l'India, unico fra i paesi Orientali per cui potemmo avere dati sicuri, ci mostra come la concentrazione debba essere in questi notevolmente inferiore a quella dei paesi Europei.

Certamente l'intensità di concentrazione delle popolazioni urbane nelle singole nazioni è in relazione con numerosi fattori di natura varia, quali lo sviluppo demografico del paese, il grado di civiltà raggiunto, la distribuzione delle risorse naturali, e infine, il carattere generale della sua economia.

Per completare lo studio sin qui svolto sarebbe interessante esaminare una ad una queste relazioni e determinare la loro estensione e la loro natura. Purtroppo però trattasi spesso di fenomeni non valutabili quantitativamente, oppure difficilmente misurabili, il che rende estremamente difficile tale opera e ci consente soltanto di estenderla — spesso con molta incertezza ed approssimazione — solo ad alcuni aspetti di essi.

Un fenomeno, attinente alla situazione demografica del Paese, di cui è interessante valutare la relazione con l'intensità della concentrazione e l'eventuale influenza su essa, è costituito dalla densità della popolazione degli Stati in esame.

L'Auerbach (1), studiando la concentrazione delle popolazioni urbane, vide subito la necessità di istituire un paragone fra i due fenomeni e servendosi delle misure sulla concentrazione da lui determinate, rilevò che essi erano indipendenti l'uno dall'altro e che il fatto che, in alcuni paesi, ad un'alto valore dell'indice di concentrazione corrisponde una forte densità, doveva ritenersi come accidentale.

Crediamo però che tale conclusione possa essere modificata attraverso una più perfezionata determinazione dell'intensità di concentrazione, un più sicuro sistema di comparazione, ed infine mediante l'estensione dell'esame ad un numero maggiore di Nazioni.

Nella tavola seguente sono esposti per le varie Nazioni i valori dei rispettivi indici di concentrazione ed i valori della loro densità di popolazione.

---

(1) Auerbach, *op. cit.*

Indici di concentrazione e densità della popolazione nelle varie Nazioni.

NAZIONI	Densità per miglia²	Concentrazione			Posti occupati nella graduatoria di intensità (1)			
		α	δ	R	Densità	α	δ	R
Belgio	659	1,45	3,22	—	1	17	15	—
Inghilterra	649	1,04	4,40	72,79	2	7	8	5
Olanda	581	1,39	3,50	—	3	15	13	—
Germania	345	1,11	5,37	71,03	4	8	5	9
Italia	329	1,29	3,80	63,30	5	13	11	15
India	226	1,68	2,43	51,51	7	18	16	18
Danimarca	206	1,13	4,93	71,38	8	9	6	8
Francia	184	1,24	4,19	66,03	9	12	10	14
Polonia	181	1,36	3,77	56,74	10	14	12	16
Rumenia	150	—	—	67,87	11	—	—	12
Jugoslavia	125	1,17	—	66.27	12	11	—	13
Spagna	112	1,45	—	51,93	13	16	—	17
Svezia	34	1,17	4,40	69,44	14	10	7	11
Stati Uniti	31	1,03	5,85	75,71	15	6	4	2
Finlandia	26	0,94	4,38	70,27	16	2	9	10
Norvegia	21	—	—	72,19	17	—	—	6
Russia	17	—	—	71,72	18	—	—	7
Cile	13	1,01	5,97	75,70	19	5	3	3
Canadà	3	0,98	6,09	73,58	20	3	2	4
Australia	2	0,82	10,82	83,84	21	1	1	1

Anche attraverso uno sguardo sommario alla tavola suesposta balza subito come evidente che in linea generale gli indici di concentrazione sono più elevati nelle nazioni in cui la densità della popolazione è bassa che in quelli in cui essa è forte.

1) Secondo i valori crescenti della densità di δ e di R e quelli decrescenti di α

Tale fatto risulta evidentissimo poi considerando non i valori assoluti delle densità e degli indici di concentrazione, ma se si considerano i posti occupati nelle rispettive graduatorie.

Si vede subito in tal modo che i due fenomeni, densità e concentrazione tendono a controgradaursi.

Infatti calcolando l'indice di cograduazione fra le due serie noi abbiamo la conferma di questo fatto: la cograduazione fra i valori delle densità e quelli dell'indice α assume il valore di — 0.43; quella fra la densità e δ di — 0.35; fra la densità ed R di — 0.49.

Ciò significa che qualunque sia la forma di misurazione addottata per la concentrazione, fra questa e la densità di popolazione esiste una controgradaazione piuttosto forte.

Per cui potremo affermare, in linea di massima, che la concentrazione delle popolazioni urbane nelle varie nazioni è inversamente proporzionale alla densità generale della popolazione, in maniera che quanto più bassa è questa, tanto maggiore è l'importanza delle città grandi in confronto alle piccole e quindi tanto maggiore la parte di popolazione assorbita dalle prime in confronto a quella assorbita dalle seconde.

Questo fatto deve attribuirsi a elementi di natura sopratutto economica, i quali fanno sì che nei paesi in cui il rapporto fra popolazione e territorio è basso, la popolazione esistente tende ad addensarsi intorno a punti determinati dando luogo in essi alla formazione di grossi centri, intorno ai quali, con criterio sommamente accentratore, svolge ed impernia la sua vita ed il suo sviluppo.

Non mancano però anche in questo caso le eccezioni.

Le più rilevanti fra queste sono offerte dalla Germania e dall'Inghilterra nelle quali ad un alto grado di concentrazione dell'urbanesimo corrisponde pure un'alta densità di popolazione.

Bisogna però per queste nazioni, tener presente il fatto della vetustà della loro origine e della loro potenza, e quello dello svolgimento contemporaneo in esse di tutte le manifestazioni della civiltà umana e dello sfruttamento economico, per cui l'attività industriale si alterna a quella agricola ed ambedue presentano grande diffusione ed importanza.

In ogni modo non crediamo che queste eccezioni possano essere sufficienti a scalzare il principio generale, mostrato quasi concordemente da tutti gli altri paesi, che quanto maggiore è la densità della popolazione, tanto minore è la concentrazione dell'urbanesimo, e viceversa quanto maggiore questa, tanto minore quella.

Non ci soffermiamo ad esaminare più minutamente quale sia il valore demografico e sociologico di tale tendenza, in quanto ciò esulerebbe dagli scopi del presente lavoro che sono puramente descrittivi e misurativi.

Speriamo però che altri, approfittanto di questo punto di partenza possa farlo e possa inoltre determinare quali possano essere gli effetti di essa sullo sviluppo futuro dei diversi popoli.

Un altro fenomeno di cui è interessante esaminare le eventuali relazioni con l'intensità di concentrazione dell'urbanesimo è rappresentato dall'ammontare della ricchezza degli abitanti nelle varie nazioni.

Si tratta, in altre parole, di determinare se, in quelle nazioni in cui la concentrazione urbana è più intensa, sia maggiore la ricchezza, oppure al contrario se questa sia più elevata nelle nazioni in cui quella è più bassa.

Naturalmente parlando di ricchezza intendiamo riferirci all'ammontare della ricchezza per abitante e non a quello assoluto, il quale influenzato com'è dal numero degli abitanti e dall'estensione del territorio impedirebbe un'esatta comparazione.

Relativamente all'ammontare della ricchezza nelle varie Nazioni, un complesso considerevole di dati, i quali riassumono i risultati più recenti e più attendibili dei calcoli dei vari autori su tale fenomeno, è esposto dal VANDELLÓS in un suo articolo sulla ricchezza della Spagna (1).

Ci serviamo di questi dati in quanto crediamo che essi siano i più recenti ed i più completi.

Malgrado essi si riferiscano alla ricchezza delle nazioni nel periodo pre-bellico, e da allora al dopo-guerra siano certamente intervenute delle modificazioni sia in relazione alla distruzione di ricchezza causata dalla guerra, sia in relazione alla diversa intensità dell'aumento della popolazione nelle varie nazioni ed alla diversa attività produttiva dei vari popoli, pur tuttavia crediamo che essi siano uguamente comparabili ai nostri dati sulla concentrazione dell'urbanesimo ed i risultati di questi paragoni possano essere accettati come attendibili.

Infatti, ciò di cui noi teniamo conto in questo paragone non è tanto la differenza assoluta dell'ammontare della ricchezza nelle

---

1) J. VANDELLÓS, *La richesse et le revenu de la Péninsule Ibérique* in « Metron » Vol. V, Fasc. IV, dicembre 1925.

varie nazioni quanto la differenza di comparazione, cioè i differenti posti che le singole Nazioni occupano nella graduatoria costruita secondo l'ammontare della ricchezza; si capisce perciò che difficilmente le variazioni fra il periodo pre-bellico ed il periodo post-bellico possono essere tali da produrre spostamenti in tale senso.

Nella tavola seguente è esposto l'ammontare della ricchezza media per abitante nelle varie Nazioni, e sono riportati vicino, per comodità di confronto, i valori degli indici di concentrazione dell'urbanesimo.

Ricchezza media per abitante nelle varie Nazioni ed indici di concentrazione dell'urbanesimo.

NAZIONI	Autore della rilevazione	Ricchezza in franchi per ab.	Indici di concentrazione dell'urbanesimo		
			α	δ	R
Stati Uniti	Off-King	10.706	1,03	5,85	75,71
Australia	Gini	8.500	0,82	10,82	83,84
Inghilterra	Stamp	8.029	1,04	4,40	72,79
Francia	Pupin-Théry	7.650	1,24	4,19	66,03
Belgio	Gini	7.200	1,45	3,22	—
Olanda	Gini	7.100	1,39	3,50	—
Germania	Helferich	6.161	1,11	5,37	71,03
Danimarca	Gini	5.200	1,13	4,93	71,38
Spagna	Vandellós	3.800	1,45	—	51,93
Svezia	Gini	3.750	1,17	4,40	69,44
Norvegia	Gini	3.700	—	—	72,19
Italia	Gini	3.125	1,29	3,80	63,30
Polonia	Gini	3.000	1,36	3,77	56,74
Rumenia	Gini	2.900	—	—	67,87
Russia	Neymarch	2.146	—	—	71,72
Iugoslavia	Gini	1.700	1,17	—	66,27
India	Gini	470	1,68	2,43	51,51

Calcolando separatamente la cograduazione fra la graduatoria costruita dell'ammontare della ricchezza e quella dei vari indici di concentrazione dell'urbanesimo, noi troviamo che rispetto ad α essa è $+0.39$, rispetto a δ di $+0.38$, rispetto ad R $+0.48$. In tutti e tre i casi quindi essa assume un valore positivo sufficientemente elevato per mettere in luce l'esistenza di una relazione positiva e diretta fra i due fenomeni.

Per cui si può affermare se non in maniera assoluta, almeno in linea generale, che il maggiore o minore ammontare della ricchezza di un paese non è indifferente alla concentrazione della popolazione urbana, e che l'intensità di questa concentrazione, cioè della tendenza della popolazione ad addensarsi negli agglomerati maggiori a preferenza dei minori, è assai più forte nelle nazioni ricche che in quelle povere.

È questa una circostanza non priva di valore sociologico che merita d'essere studiata più a lungo e più particolareggiatamente di quanto non sia possibile fare in questo breve studio.

Pure interessante sarebbe il vedere se esista qualche relazione, diretta o inversa, fra la concentrazione dell'urbanesimo e la concentrazione della ricchezza. Vedere cioè se nei paesi in cui la ricchezza è fortemente concentrata, ossia posseduta nella sua maggior parte da pochi individui, vi sia contemporaneamente una forte concentrazione dell'urbanesimo, oppure questa sia proporzionalmente minore che nei paesi in cui la ricchezza è assai frazionata.

L'interesse di questa determinazione sarebbe assai grande in quanto essa aprirebbe il campo ad un'infinità di rilievi intorno all'influenza sociale della distribuzione della ricchezza sulle caratteristiche demografiche dei vari paesi e sul loro sviluppo.

Putroppo, però, scarsissimi — sopratutto in relazione alle difficoltà di avere dati particolareggiati che permettano un calcolo laborioso quale è quello della concentrazione — sono gli studi in proposito. Anzi di recentissimi non ne conosciamo alcuno.

Per alcune nazioni fu calcolato dal Gini (1) un indice di concentrazione nelle seriazioni dei patrimoni ereditari in base alla formula: $\log. N = H - \alpha' (\log. X)^2$ che esprime la relazione intercedente fra l'ammontare X dei patrimoni ed il numero N dei patri-

---

1) C. Gini, *L'ammontare e la composizione della ricchezza delle Nazioni.* Fratelli Bocca, Editori, Torino 1914, Pag. 472 e segg.

moni superiori ad un determinato limite. In essa α' rappresenta l'indice di disuguaglianza di distribuzione, ossia di concentrazione: α' si alza col diminuire della concentrazione e si abbassa col suo aumentare.

Riportiamo nella tavola seguente, togliendoli dal predetto lavoro, i valori di α' per quelle nazioni per cui noi potemmo calcolare i vari indici di concentrazione dell'urbanesimo.

Indice di concentrazione dei patrimoni ereditari in alcuni Stati.
(Gini).

NAZIONE	Anni a cui si riferisce il calcolo	α
Inghilterra (Estate duty)	1908–09, 10–11	0,0922
Rumenia	1900–03	0,0954
Olanda	1909–10	0,0967
Belgio	1906	0,0993
Francia	1910	0,1039
Spagna	1907–08	0,1052
Italia	1909–10, 10–11	0,1104
Finlandia	1907–08	0,1158
Danimarca	1909–10, 10–11	0,1239

La cograduazione fra la graduatoria di questi dati e quella degli indici di concentrazione dell' urbanesimo da noi precedentemente determinati, assume fra α' e α il valore di — 0,21, fra α' e δ quello di — 0,33, fra α' ed R un valore nullo.

Il che mostrerebbe che fra concentrazione della ricchezza e concentrazione dell'urbanesimo non vi è alcuna relazione e che eventualmente vi sarebbe più tendenza al formarsi di una relazione inversa che di una diretta.

La scarsità del numero di Stati per cui fu fatto il calcolo, la scarsa rappresentatività dell'indice, il fatto che esso si riferisce esclusivamente ai patrimoni ereditari, le cui statistiche sono spesso alterate dalle evasioni o trascurano parte dei beni, specialmente mobili, il fatto infine che le misurazioni della concentrazione della

ricchezza nei singoli stati si riferiscono ad anni diversi, non ci permettono però di generalizzare questa constatazione e di trarre da essa alcun principio generale.

Non è però da escludersi che calcoli più dettagliati e più omogenei possano portare a risultati diversi da quelli da noi ottenuti e mettere in luce una relazione che sarebbe della massima importanza ed interesse.

Un ultimo aspetto della concentrazione dell'urbanesimo degno di un particolare interesse, è costituito dalla dinamica della concentrazione stessa, cioè dalle sue variazioni nel tempo.

Si tratta, in altre parole, di stabilire se le popolazioni urbane tendano nel tempo a concentrarsi sempre più o a diminuire l'intensità della loro concentrazione.

A tal uopo abbiamo potuto raccogliere per alcune Nazioni dati intorno alla distribuzione delle loro popolazioni nelle varie città in epoche diverse, in maniera da poter calcolare per parecchie di queste i rispettivi indici di concentrazione ed istituire così dei confronti tra l'una e l'altra.

I risultati di questi calcoli che variano notevolmente da Nazione a Nazione mostrano che in generale vi è una tendenza ad una progressiva concentrazione degli aggregati urbani nel tempo, la quale si estrinseca in una espansione proporzionalmente maggiore dei centri più grandi in confronto ai più piccoli.

Nella tavola seguente sono riportati i valori degli indici di concentrazione calcolati per epoche diverse nelle singole Nazioni.

Indici di concentrazione nelle varie Nazioni attraverso il tempo

NAZIONE	Anni di rilevazione	Indici di concentrazione		
		α	δ	*R*
India	1911	1,69	2,39	42,06
	1921	1,68	2,43	42,50
Germania	1910	1,11	4,68	73,13
	1925	1,10	5,37	71,03
Cile	1895	1,04	4,63	61,41
	1907	1,08	5,09	70,05
	1920	1,01	5,97	75,70
Canadà	1001	1,09	4,53	67,22
	1911	1,07	5,46	72,08
	1921	0,99	6,09	73,58
Danimarca	1906	1,10	4,98	70,71
	1911	1,16	5,19	70,19
	1916	1,23	5,06	70,86
	1921	1,10	4,93	69,65
	1925	1,12	4,84	68,99
Francia	1856	1,40	3,32	60,07
	1861	1,41	3,76	60,98
	1906	1,26	4,08	64,07
	1911	1,26	4,12	65,84
	1921	1,24	4,19	66,03
Stati Uniti	1890	1,08	4,95	68,65
	1900	1,06	5,11	71,68
	1911	1,05	5,65	73,78
	1921	1,03	5,85	75,71
Rumenia	1899	—	—	57,80
	1911	—	—	60,03
	1920	—	—	67,87

Esaminando partitamente le singole Nazioni e specialmente quelle per cui fu possibile calcolare gli indici per un numero sufficiente d'anni, noi vediamo che in quasi tutte esse è chiaramente manifesta, attraverso le variazioni degli indici, la tendenza all'aumento di concentrazione.

Negli Stati Uniti d'America tutti e tre gli indici calcolati sono concordi nel dimostrare la costanza dell'aumento: dal 1890 al 1921 l'indice α passa successivamente da un valore 1,08 a 1,06, a 1,05 a 1,03, l'indice δ da un valore di 4,95 a 5,11, a 5,65 ed infine a 5,95; il rapporto R pure varia successivamente nelle epoche di rilevazione da 68,65 a 71,68 a 73,80 e 75,71.

Parimenti nella Francia α passa da 1,40 nel 1866 a 1,24 nel 1921; δ da 3,20 a 4,19; R da 60,07 a 66,03.

Nel Canadà, nel ventennio dal 1901 al 1921, si verificano rilevantissime variazioni di concentrazione: α passa da 1,09 a 0,99; δ da 4,53 a 6,09; R infine da 67,52 a 73,58. Nel Cile il valore di R, nel venticinquennio dal 1895 al 1920, varia da 61,41 a 75,70, quello di δ da 4,63 a 5,97 ed α pure da 1,04 a 1,01. Pure nell'India si verificò un aumento da 42,06 a 42,50 per R, da 2,39 a 2,43 per δ da 1,69 a 1,68 per α.

Nella Rumenia infine, per cui ci fu possibile — per le ragioni sopra esposte — soltanto il calcolo di R, il valore di questo varia da 57,80 nel 1899 a 67,87 nel 1920.

Unica eccezione a questa regolarità d'aumento è rappresentata dalle variazioni della concentrazione in Danimarca. In questa Nazione infatti si verifica attraverso il tempo un succedersi alternato di aumenti e di diminuzioni. Nel periodo considerato, cioè dal 1906 al 1925, l'indice α mostra una continua diminuzione dal 1906 al 1916, un aumento da quest'anno al 1921, una nuova diminuzione dal 1921 al 1925, δ mostra un lieve aumento dal 1906 al 1911 ed una diminuzione ininterrotta da quest'anno al 1925; R invece un lieve aumento fino al 1916 a cui tien dietro negli anni successivi una regolare diminuzione.

Prescindendo dalle discordanze riscontrate nell'andamento dei vari indici per questa Nazione, si può in ogni modo constatare che essa costituisce un'eccezione alla regola generale dell'andamento della concentrazione dell'urbanesimo attraverso il tempo.

Difficile è il ritrovare le cause specifiche che influirono su tale diminuzione di concentrazione, e la loro determinazione richiederebbe un esame particolareggiato delle condizioni demografiche della Dani-

marca e delle fasi del suo sviluppo il quale esulerebbe dagli scopi del presente lavoro.

In ogni modo questa sola eccezione, tenendo conto anche del fatto che trattasi di Nazione di scarsa grandezza sia come entità geografica che come entità demografica non serve ad infirmare la regola generale dell'aumento progressivo della concentrazione, quale è dimostrata concordemente dai calcoli fatti per tutte le altre Nazioni esaminate.

Perciò potremo concludere che l'aumento dell'urbanesimo, quale si rivela nella gran maggioranza degli Stati non si verifica in maniera proporzionale per tutte le specie di città, ma vi è una corrente assai maggiore che si rivolge verso le città grandi in maniera che l'importanza di queste rispetto alle piccole va aumentando nel tempo e la concentrazione delle popolazioni urbane tende a continuamente aumentare.

Abbiamo voluto vedere se questo aumento di concentrazione fosse corrispondente all'aumento generale della popolazione nelle Nazioni considerate e fosse dall'intensità di questo direttamente influenzato.

A tal uopo abbiamo messo a confronto per le singole Nazioni le variazioni percentuali della concentrazione con quelle del numero degli abitanti (1).

Nel prospetto sono riportate le variazioni del numero degli abitanti e le variazioni della concentrazione fra le due epoche estreme per cui in ogni nazione potemmo determinare questo valore.

---

1) Le variazioni percentuali della concentrazione le calcolammo esclusivamente in base alle variazioni del Rapporto (R) di concentrazione, unico fra i vari indici adoperati che permettesse una misura esatta di esse, senza richiedere eccessive complicazioni di calcoli quali sarebbero necessarie per determinare queste variazioni in base all'indice δ.

Per il metodo adoperato nella misura delle variazioni percentuali dei rapporti di concentrazione, il lettore potrà vedere l'articolo del Gini, *Sull' aumento di mortalità causato dalla guerra*. « Rivista Italiana di sociologia ».

Alcune applicazioni di questo metodo si trovano nel nostro articolo: *I profitti delle società per azioni e la concentrazione dei capitali industriali.* « Metron » Vol. VI, fasc. I.

Variazioni della concentrazione e variazioni nel numero degli abitanti in alcune nazioni

NAZIONI	Periodo	Variazioni di *R*	Variazioni assolute del numero degli abitanti	Variazioni % abitanti
Cile	1895–1920	+ 0,00606	+ 1.041.584	+ 38,40
Rumenia	1899–1921	+ 0,00412	+ 11.034.310	+ 184,96
Stati Uniti	1890–1920	+ 0,00328	+ 42.762.906	+ 67,93
Canadà	1901–1921	+ 0,00279	+ 3.397.170	+ 63,24
Francia	1861–1920	+ 0,00212	+ 1.883.205	+ 5,03
India.	1910–1920	+ 0,00018	+ 3.070.115	+ 1,25

La scarsità del numero delle Nazioni che potemmo considerare ci impedisce di arrivare a conclusioni generali e di affermare con sicurezza l'esistenza di principi che potrebbero da non altro essere determinati che dal caso e sparire qualora si potesse istituire un più vasto confronto. In ogni modo dai pochi dati su riportati si può rilevare che fra intensità d'aumento della concentrazione dell'urbanesimo ed intensità d'aumento della popolazione esiste una relazione per cui quella mostra di essere stata tanto maggiore, quanto più elevata è stata questa.

Infatti la cograduazione fra le due serie assume un valore di + 0.55, abbastanza forte per dimostrare l'esistenza di tale relazione.

L'eccezione più notevole è rappresentata dal Cile, in cui, nel venticinquennio considerato, mentre l'incremento percentuale della popolazione fu assai meno intenso di quello di altre Nazioni, quali la Rumenia, il Canadà, gli Stati Uniti, l'aumento della concentrazione fu assai forte e tale da superare quello verificatosi in tutte esse.

La relazione intercorrente fra intensità d'aumento della concentrazione dell'urbanesimo ed intensità d'incremento complessivo della popolazione può esser messo in luce per ogni Nazione dalla comparazione del comportamento dei due fenomeni fra i diversi censimenti.

I dati per tale confronto sono esposti nella tavola seguente:

Variazioni della concentrazione dell'urbanesimo e dell'ammontare complessivo della popolazione nei singoli Stati fra le varie rilevazioni

NAZIONE	Periodo	Variazioni % concentrazione	Aumento abitanti (Valore assoluto)	Aumento abitanti %
Canadà	1901–1911	+ 0,00267	+ 1.935.558	+ 36,03
	1911–1921	+ 0,00074	+ 1.581.840	+ 21,94
Cile	1895–1907	+ 0,00322	+ 504.450	+ 18,90
	1907–1920	+ 0,00268	+ 504.450	+ 15,52
Francia	1861–1906	+ 0,00206	+ 1.866.932	+ 4,99
	1906–1911	+ 0,00077	+ 352.747	+ 0,89
	1911–1921	+ 0,00008	— 395.474	— 0,99
Stati Uniti	1890–1900	+ 0,00140	+ 13.046.861	+ 20,72
	1900–1910	+ 0,00103	+ 15.977.701	+ 21,02
	1910–1926	+ 0,00099	+ 13.738.344	+ 14,90
Rumenia	1899–1911	+ 0,00091	+ 1.130.606	+ 18,98
	1911–1920	+ 0,00326	+ 8.913.264	+ 125,77

In essa si riscontra per tutte le Nazioni considerate che quanto più forte fra un periodo e l'altro fu l'aumento complessivo della popolazione, tanto più forte fu l'aumento della concentrazione.

Tale fatto è evidentissimo nel Canadà in cui ad una forte diminuzione della percentuale d'incremento degli abitanti nel decennio 1911-1921 in confronto al decennio precedente corrisponde una pure rilevante differenza d'aumento dell'intensità di concentrazione.

Lo stesso può dirsi per il Cile, per la Rumenia, per la Francia: in questa però nell'ultimo periodo, cioè nel decennio 1910-1920, mentre l'ammontare complessivo della popolazione segna una diminuzione, il valore della concentrazione subì un aumento.

A proposito di quest'ultima però bisogna tener conto del fattore di perturbazione costituito dalla guerra il quale alterò e notevolmente sia lo stato complessivo della popolazione sia la sua distribuzione.

Una eccezione si verifica pure negli Stati Uniti per i quali se

in linea generale si verifica la solita concordanza fra intensità d'incremento della popolazione e intensità d'aumento della concentrazione urbana, nel periodo 1900-1910, mentre si verificò un incremento di popolazione superiore a quello verificatosi nel periodo precedente, l'aumento di concentrazione fu proporzionalmente minore.

Le piccole differenze dei singoli valori ci consigliano però a non dare eccessiva importanza a questa anomalìa la quale, crediamo, sia da attribuirsi alle speciali condizioni dello sviluppo demografico ed economico degli Stati Uniti, ed al fenomeno immigratorio che in quegli anni per quella nazione aveva un'importanza tale da alterare il ciclo normale dello sviluppo della popolazione.

Altre anomalìe si riscontrano nella Danimarca per cui la concentrazione dell'urbanesimo subisce quelle modificazioni irregolari che più su notammo, le quali indicano completa autonomia di svolgimento dei due fenomeni. In questa Nazione lo sviluppo demografico delle diverse città si svolse nel tempo, o per lo meno si svolse nel primo venticinquennio del secolo in corso, in maniera diversa da quella con cui si svolse nelle altre Nazioni: mentre in queste parallelamente allo sviluppo generale della popolazione, crebbero in misura maggiore le città grandi in confronto delle piccole, per cui la concentrazione urbana andò aumentando, in Danimarca si verificò il fenomeno inverso di uno sviluppo proporzionalmente maggiore di queste in confronto di quelle.

In ogni modo, malgrado le singole eccezioni, l'andamento dei casi esaminati, è abbastanza concorde per permetterci di affermare che l'aumento di concentrazione dell'urbanesimo segue l'aumento complessivo della popolazione dello Stato e l'intensità di quello strettamente dipende dall'intensità di questo.

Ciò è messo in luce anche dal fatto che mentre la concentrazione varia solo di poco nelle nazioni la cui popolazione è stazionaria o presenta aumenti di lieve entità, nelle Nazioni il cui sviluppo demografico è intenso essa subisce d'anno in anno variazioni assai notevoli.

Per dare maggior valore a questo fatto controllato empiricamente e per poterlo assumere a principio generale sarebbe stato necessario poter estendere l'esame a periodi di tempo assai lunghi in cui le popolazioni dei singoli stati non presentassero, come negli ultimi decenni del secolo passato e nei primi dell'attuale, soltanto ampi sviluppi, ma presentassero anche diminuzioni di non lieve entità.

Se in corrispondenza a questi la concentrazione mostrasse di-

minuzioni, allora si potrebbe affermare la stretta subordinazione dei due fenomeni e la diversa ripercussione che l'aumento o la diminuzione della popolazione ha sulle città a seconda della loro grandezza. Non avendo potuto fare questo esame completo non possiamo affermare alcun principio assoluto e non ci resta che limitarci alle constatazioni più su fatte tenendo conto però che il fenomeno dell'urbanesimo, ed ancor più quello della sua concentrazione sono influenzati oltre che dallo sviluppo generale delle popolazioni anche da un'infinità di altri fattori i quali in determinate circostanze è possibile che alterino con la loro azione quel legame di dipendenza fra aumento di popolazione ed aumento di concentrazione urbana quale fu da noi constato.

Come dicemmo iniziando questo lavoro lo stesso metodo di analisi applicato nello studio delle popolazioni urbane dei singoli Stati può essere esteso alle popolazioni complessive di essi.

Già rilevammo come in ogni stato la popolazione non si presenta uniformemente ripartita su tutto il territorio, ma bensì divisa in tante formazioni di varia grandezza ognuna delle quali ha caratteristiche sue proprie che la distinguono dalle altre.

Di queste formazioni il centro urbano propriamente detto non è che il nucleo principale: intorno a questo esiste una zona meno densamente popolata da esso strettamente subordinata, la cui popolazione fa capo al centro stesso per lo svolgimento delle proprie attività sociali, ed in esso ha il proprio centro di riferimento.

Talvolta queste formazioni non fanno neppure capo ad un centro urbano propriamente detto, ma ad un gruppo di case, spesso contenente meno di 500 abitanti.

A tali formazioni, esistenti in tutte le nazioni come entità di fatto, fu dato in alcune il riconoscimento giuridico, ed esse — chiamate Comuni — costituiscono la base fondamentale della ripartizione amministrativa degli Stati stessi.

Per queste Nazioni i censimenti portano i dati della popolazione esistente in tali entità naturali, il che ci permette di studiarne particolareggiatamente la distribuzione.

Di comuni ve ne sono, in ogni Stato di varie dimensioni, sia per territorio che per ammontare di popolazione. Se noi li prendiamo in considerazione separatamente, li ordiniamo in relazione all'ammontare dei loro abitanti, li raggruppiamo in classi, potremo constatare ciò che già constatammo per le città, che fra numero dei comuni e loro popolosità corre una relazione per cui il primo è tanto

più elevato quanto minore è la seconda e viceversa è tanto più basso quanto essa è maggiore, e che questa relazione è sempre uguale in forma — pur variando in intensità — in tutte le Nazioni. In maniera che la forma della distribuzione dei Comuni in funzione al numero de loro abitanti può venire considerata come costante.

Il che significa che la formazione di queste entità per quanto spontanea non è regolata dal caso ma avviene secondo leggi di sviluppo perfettamente costanti in tutti i gruppi sociali.

Le diverse intensità con cui, malgrado la costanza della forma, si sviluppano le distribuzioni nelle singole Nazioni, fanno si che le popolazioni di esse sieno assai diversamente concentrate.

E precisamente saranno tanto più concentrate quanto maggiore sarà la parte di esse che è assorbita dai comuni maggiori in confronto ai minori.

La determinazione dell'intensità di concentrazione delle popolazioni complessive ha un'importanza forse maggiore di quella dell'intensità della concentrazione delle popolazioni urbane, in quanto che i vari comuni, i quali negli organismi sociali si possono paragonare alle cellule degli organismi biologici, hanno in essi una funzione diversa a seconda della loro grandezza. I comuni maggiori la cui popolazione è costituita nella gran maggioranza da popolazione urbana, esercitano nella vita della nazione funzioni di produzione di consumo e di scambio ben diverse da quelle esercitate dai comuni minori composti generalmente e spesso totalmente da popolazione rurale.

Si capisce perciò facilmente che a seconda che in una Nazione prevalgano gli uni o gli altri, a seconda cioè che la popolazione di essa è più o meno concentrata, varieranno notevolmente le sue condizioni intrinseche sia dal punto di vista della produzione, sia da quello ad esso subordinato delle condizioni generali di vita, del grado di civiltà raggiunto, delle possibilità di sviluppo futuro.

Per constatare l'esistenza della relazione costante fra densità dei comuni e la popolosità assoggettammo le seriazioni che i singoli censimenti ci portavano, ad un trattamento matematico analogo a quello a cui assoggettammo prima le seriazioni delle città.

Tenendo conto però, che quello che a noi sopratutto importava, in questo studio era la misurazione effettiva della concentrazione, trascurammo di calcolare l'indice α (dato dal numero dei comuni in funzione dell'ammontare limite dei loro abitanti) il quale, come vedemmo, serve solo a mostrare se la distribuzione del fenomeno segua o meno una forma costante, misurando solo in maniera

assai incerta ed approssimativa l'intensità della concentrazione nei varii casi e ci limitammo a calcolare l'indice δ del GINI il quale serve contemporaneamente ad ambedue gli scopi.

L'impostazione del calcolo fu fatta secondo il modo proposto dal GINI, ed applicato precedentemente per la determinazione della concentrazione dell'urbanesimo.

Per dimostrare la buona applicabilità della formula $\left(\frac{A_i}{A_n}\right)^\delta = \frac{i}{n}$ alle seriazioni dei comuni costruimmo i diagrammi relativi per tutte le Nazioni per cui le fonti ufficiali portano le seriazioni del numero dei comuni e dell'ammontare complessivo dei loro abitanti.

Potemmo constatare facilmente da questi che i logaritmi del numero dei comuni in funzione a quelli del numero dei loro abitanti, si distribuiscono quasi perfettamente secondo una retta, e che quindi vige per essi la formula: $\log. A_n = \delta \log. A_i - \log. K$ da cui si risale alla precedente. Perciò il calcolo di δ può farsi sia col sistema della determinazione della media degli esponenti, sia con quella del coefficiente d'interpolazione.

Riassumiamo nella tavola seguente i risultati ottenuti con i due sistemi ed il lettore potrà vedere come essi, solo per uno o due casi, differiscano sensibilmente fra loro.

Valori di δ calcolato sull'intera popolazione ripartita in comuni.

NAZIONI	Anno	δ	
		esponente	coefficiente
Germania	1924	5,76	5,40
Francia	1921	4,41	4,26
Olanda	1920	4,27	3,91
Belgio	1920	3,82	2,99
Italia	1921	3,66	3,00
Svizzera	1920	3,62	3,28
Czeco-Slovacchia	1921	3,17	3,14
Giappone	1925	2,95	3,03
Jugoslavia	1920	2,43	2,20
Bulgaria	1910	2,14	2,11

Malgrado le Nazioni a cui potemmo estendere il calcolo non sieno molte, in quanto non in tutte vige la ripartizione amministrativa in comuni, e neppure in tutte quelle in cui essa vige i censimenti portano i dati relativi agli abitanti di ciascun comune, i risultati sia grafici che aritmetici ottenuti dalla loro elaborazione ci mostrano chiaramente e sicuramente ciò che più sopra dicemmo, cioè, che in ogni nazione la distribuzione dei comuni in relazione alla loro grandezza segue una legge costante la cui espressione algebrica è data dalla formula prima riportata.

Per meglio misurare la concentrazione integrando i risultati di δ e per permettere una più sicura interpretazione di essi, abbiano voluto calcolare anche, come già facemmo per le città, il rapporto R il quale misura la concentrazione indipendentemente dalla forma di distribuzione.

I risultati di tale calcolo sono esposti nella tavola seguente.

Valori del rapporto di concentrazione calcolato sulla popolazione delle varie Nazioni divisa in Comuni.

NAZIONE	Anno di rilevazione	R
Germania	1924	91,05
Francia	1921	86,05
Svizzera	1920	72,42
Olanda	1920	69,46
Belgio	1920	66,88
Italia	1921	61,63
Czeco-Slovacchia	1921	57,82
Jugoslavia	1920	55,69
Giappone	1925	47,14
Bulgaria	1910	43,16

Calcolando la cograduazione fra i dati di questa tavola e quelli della tavola precedente questa risulta assai alta: fra R e δ espo-

nente essa è di $+ 0{,}80$, e fra R e δ coefficiente di $+ 0{,}72$, mostrando con ciò che i risultati rispettivi concordano sufficientemente bene nel dare la misura della concentrazione.

Sia dall'una che dall'altra di esse risulta poi chiaro che le differenze di concentrazione fra Nazione e Nazione sono grandissime: δ varia tra un massimo di 5,76 ed un minimo di 2,14; R fra un massimo di 91,05 e un minimo di 43,10.

Nelle Nazioni esaminate la popolazione più fortemente concentrata è quella della Germania seguita poi da quella della Francia, dell'Olanda, del Belgio e dalle altre fino alla Bulgaria che occupa l'ultimo posto in ambedue le graduatorie.

Dall'andamento di queste graduatorie di concentrazione risulta chiaramente che la concentrazione stessa è assolutamente indipendente all'ammontare della popolazione delle varie Nazioni, e solo relativamente dipendente dalla sua densità.

Calcolammo all'uopo la cograduazione esistente fra la graduatoria delle Nazioni, formata in base al valore delle rispettive intensità di concentrazione, e quelle formate in base sia all'ammontare assoluto degli abitanti di ciascuna Nazione, sia in base alla densità media della popolazione esistente in queste.

Concentrazione, ammontare assoluto e densità della popolazione nelle varie Nazioni.

NAZIONI	Anno di rilevazione	Concentrazione		Popolaz. complessiva	Densità per miglio²
		δ	R		
		1	2	3	4
Germania	1924	5,76	91,05	62.539.098	345
Francia	1921	4,71	86,05	32.209.518	184
Olanda	1920	4,27	69,46	6.865.314	581
Belgio	1920	3,82	66,88	7.465.782	635
Italia	1921	3,66	61,63	38.755.576	329
Svizzera	1920	3,62	71,42	3.880.320	243
Czeco-Slovacchia	1921	3,17	57,82	13.613.172	251
Giappone	1924	2,95	47,14	61.081.954	234
Jugoslavia	1921	2,43	55,69	12.017.323	125
Bulgaria	1910	2,14	43,16	4.337.516	129

Ecco i risultati ottenuti:

Congraduazione fra *ammontare abitanti* e δ (c. 3-1) = + 0.24
» » *ammontare abitanti* e R (c. 3-2) = + 0.14
» » *densità media* e δ (c. 4-1) = + 0.56
» » *densità media* e R (c. 4-2) = + 0.38

Queste cifre mostrano chiaramente, pur tenendo conto dello scarso numero delle Nazioni considerate che l'intensità della concentrazione delle popolazioni nei singoli Stati è assai scarsamente influenzata sia dal numero complessivo degli abitanti esistenti in ogni Stato sia dalla loro densità.

Il che mette in luce quanto precedentemente dicemmo che, cioè, la concentrazione delle popolazioni nelle varie nazioni, più che da cause demografiche propriamente dette, dipende da cause economiche e sociali, ed è attinente alle caratteristiche che in questo campo assume la Nazione considerata.

Tale fatto risulta abbastanza evidente se mettiamo in relazione l'intensità della concentrazione con l'ammontare medio delle ricchezza per abitante e con quello del reddito nei vari paesi.

Togliendo i dati relativi all'ammontare del reddito e della ricchezza dalla fonte precedentemente citata ottenemmo per le Nazioni prese in esame le seguenti graduatorie:

Ammontare della ricchezza privata e del reddito per abitante nelle varie Nazioni e comparazione delle rispettive graduatorie crescente con quelle degli indici di concentrazione.

NAZIONI	Ricchezza privata per abitante	Reddito per abitante	Graduatoria d'intensità crescente		Graduatoria degli indici di concentrazione	
	in franchi	in franchi	Ricchezza	Reddito	δ	*R*
Francia	7.650	945	1	1	2	2
Belgio	7.200	910–980	2	2	4	5
Olanda	7.100	880–960	3	3	3	4
Germania	6.161	757	4	4	1	1
Svizzera	5.176	—	5	—	6	3
Czeco-Slovacchia	4.000 (1)	550	6	5	7	7
Italia	3.125	530–557	7	6	5	6
Bulgaria	2.000	360–400	8	7	10	10
Jugoslavia	1.700	310–370	9	8	9	8
Giappone	1 300	230	10	9	8	9

1) Ricchezza Nazionale.

La cograduazione fra le intensità della ricchezza e quelle della concentrazione, misurate da δ è di + 0.64, e quelle misurate da *R* di + 0.68. La congraduazione fra reddito e δ è di + 0.69, fra reddito e *R* + 0.66.

Possiamo perciò concludere che le relazioni fra le condizioni economiche di un paese e l'intensità della concentrazione dei suoi abitanti sono abbastanza strette ed anche fra questa e quelle corre un vincolo di mutua dipendenza.

Ci resta ora da esaminare le variazioni della concentrazione nel tempo.

Per quasi tutte le Nazioni per cui fummo in grado di calcolare gli indici di concentrazione potemmo estendere lo studio a periodi abbastanza lunghi e tali da permetterci di avere un quadro abbastanza completo delle loro variazioni nel tempo.

Nella tavola seguente sono esposti i risultati ottenuti calcolando la concentrazione nelle singole Nazioni, nelle varie epoche di censimento.

Indici di concentrazione della popolazione nei vari censimenti

NAZIONE	Anno di rilevazione	Indici di concentrazione δ Coefficiente	δ Esponente	R
Belgio	1856	2,70	2,90	57,38
	1866	2,70	2,92	57,94
	1876	2,80	3,16	60,79
	1880	2,85	3,19	60,59
	1890	3,00	3,39	62,88
	1900	3,01	3,60	64,63
	1910	2,97	3,73	65,96
	1920	2,99	3,82	66,88
Olanda	1840	3,36	4,47	87,84
	2849	3,41	4,11	84,40
	1859	3,13	3,33	77,69
	1869	3,26	3,61	76,67
	1879	3,34	8,69	74,00
	1889	3,58	3,88	73,37
	1899	3,85	4,35	73,49
	1909	3,91	4,31	71,30
	1920	3,90	4,27	69,46
Francia	1856	3,06	3,01	64,27
	1861	3,42	3,11	66,87
	1906	4,04	3,99	74,16
	1911	4,09	4,14	86,07
	1921	4,26	4,41	86,15
	1921 (90 dip.)	4,23	4,26	86,03
Italia	1882	2,56	2,99	55,84
	1901	2,70	3,22	57,30
	1911	2,86	3,31	58,69
	1921	3,00	3,66	61,63
Bulgaria	1887	1,98	2,02	41,26
	1892	2,03	2,09	42,24
	1900	2,11	1,10	42,47
	1905	2,11	2,16	42,94
	1910	2,11	2,14	43,16
Giappone	1903	2,93	2,76	42,39
	1908	2,98	2,87	43,41
	1913	2,98	2,87	44,56
	1925	3,03	2,95	47,14
Germania	1010	4,98	5,31	94,33
	1924	5,40	5,76	91,05
Svizzera	1910	3,08	3,45	66,47
	1920	3,28	3,62	71,42

L'esame di questa tavola mostra anzitutto che esiste una tendenza, parallela allo sviluppo demografico delle varie Nazioni, ad un progressivo aumento di concentrazione delle loro popolazioni. Tale tendenza si esplica però in maniera attenuata, in ogni caso con molto minore intensità di quanto vedemmo verificarsi per la concentrazione dell'urbanesimo, per cui le variazioni subìte dagli indici nelle varie Nazioni non assumono aspetti di particolare importanza, nè di eccessiva intensità.

Le variazioni più importanti dei vari indici e le esplicazioni più intense di questa tendenza all'aumento, si verificano nella Francia in cui nel sessantennio 1856-1921 il valore di R passa da 64,27 a 86.15 e quello di δ da 3,01 a 4,41.

In ogni modo però si può rilevare dall'andamento generale dei vari indici nelle singole Nazioni che gli aumenti più sensibili si verificarono nel secolo passato, mentre in quello attuale lo stato della concentrazione mostra di essersi mantenuto abbastanza uniforme, e di aver subito variazioni di assai minore intensità.

Bisogna però, per esattamente interpretare queste variazioni della concentrazione nel tempo, tener presente che i dati su cui noi calcolammo i vari indici si riferiscono ai comuni amministrativi, i quali per quanto corrispondenti ad altrettante entità naturali, hanno pur sempre in sè qualchecosa di artificiale e soggetto quindi a variazioni indipendenti dal movimento demografico effettivo della popolazione. Aggiungasi a questo fatto le variazioni territoriali subite dalle varie Nazioni a causa delle guerre e si capirà subito come l'importanza di queste comparazioni di concentrazione nel tempo è limitata, ed i loro risultati lascino sempre addito ad incertezze specialmente in quanto tendono a misurare lo sviluppo della concentrazione parallelamente allo sviluppo demografico generale delle singole Nazioni.

Non mancano inoltre eccezioni al principio generale.

Caratteristico sopratutto è l'andamento dei vari indici per l'Olanda, in cui, contrariamente a quanto si verifica per le altre Nazioni, la concentrazione tende a diminuire attraverso il tempo.

Questo, fatto, come dicemmo, è probabilmente da attribuirsi sopratutto alle successive riduzioni verificatesi nel numero dei comuni nei periodi considerati le quali perturbano l'andamento dei vari indici. Resta però pur sempre la circostanza che tali spostamenti non furono compensati da una parallela tendenza all'aumento della concentrazione la quale avrebbe dovuto pur sempre farsi sentire. Il che

impedisce di escludere senz'altro che in detto paese possa essersi verificata una effettiva diminuzione di concentrazione, la quale, specialmente tenendo presente la forte densità della popolazione Olandese mostrerebbe che là dove la densità ha raggiunto un alto livello le popolazioni tendono più a decentrarsi che ad accentrarsi.

Un altro aspetto della distribuzione delle popolazioni nei vari Stati, degno di esame, consiste nello stabilire se la legge di distribuzione che vedemmo valere per le intere Nazioni, valga per le singole regioni di esse e precisamente per quelle parti del loro territorio che hanno caratteristiche geografiche, etniche, storiche ben definite.

A tal uopo prendemmo in considerazione la popolazione delle varie regioni italiane, le quali, come si sa, presentano ben marcate queste distinzioni. Sulle seriazioni dei comuni di ciascuna regione in funzione al numero dei rispettivi abitanti cercammo di applicare la formula (δ) di distribuzione che vedemmo valere con buona approssimazione per le seriazioni dei comuni dell'intera Nazione.

I risultati di questo calcolo esposti nella tavola seguente furono abbastanza soddisfacenti per alcune regioni, meno per altre. Le differenze fra δ calcolato come esponente e δ calcolato come coefficiente, mentre per alcune regioni sono minime, per altre sono assai forti.

Valori di δ nelle varie regioni d'Italia e nel Regno.

REGIONI	δ coefficiente	δ esponente
Lazio	5,84	5,45
Venezia Giulia	4,09	4,63
Lombardia	3,90	3,70
Campania	3,86	3,66
Liguria	3,80	4,57
Piemonte	3,61	3,70
Toscana	3,44	3,51
Sicilia	2,85	3,73
Emilia	2,44	2,63
Trentino	2,43	2,51
Veneto	2,33	2,36
Sardegna	2,25	2,39
Puglie	2,17	3,01
Umbria	2,07	3,02
Marche	1,98	2,46
Calabrie	1,85	2,04
Abruzzi	1,76	1,94
Basilicata	1,58	1,82

Come si può vedere subito le differenze più sensibili fra i valori di δ calcolati nelle due maniere si verificano nella Venezia Giulia, nella Liguria, nella Sicilia, nelle Puglie e nell'Umbria, mentre in tutte le altre regioni la concordanza è ottima.

In ogni modo le non forti discordanze verificatesi, molte delle quali sono dovute allo scarso ammontare della popolazione complessiva della regione considerata, e probabilmente sparirebbero se si fondessero assieme regioni contigue ed affini, non infirma il fatto, — mostrato concordemente da tutte le altre regioni e specialmente dalle più importanti per numero d'abitanti, per vastità di territorio

e per attività produttiva — che le popolazioni dalle singole regioni d'Italia, si uniformano esse pure alle medesime leggi di distribuzione nei vari comuni cui si uniforma la popolazione complessva di tutto lo Stato.

A misurare più esattamente la concentrazione abbiamo ritenuto opportuno calcolare anche i valori del rapporto R, il quale ha speciale importanza in quanto ci può dare la misura esatta della concentrazione stessa in quelle regioni in cui la seriazione segue male la legge di δ.

I risultati di tale calcolo sono i seguenti:

Valori di R nelle varie regioni d'Italia (1921).

REGIONE	R
Liguria	78,06
Venezia Giulia	68,33
Lazio	68,04
Lombardia	63,22
Piemonte	60,74
Sicilia	59,82
Trentino	57,92
Campania	57,17
Umbria	55,66
Puglie	55,64
Sardegna	52,63
Toscana	51,87
Marche	50,53
Emilia	46,96
Veneto	44,68
Calabria	41,00
Abruzzi	42,68
Basilicata	26,24

Essi concordano abbastanza bene con quelli ottenuti mediante l'indice δ precedentemente esposti.

La cograduazione della graduatoria di R con quella di δ coefficiente assume un valore di $+ 0.68$, con quella di δ esponente invece di $+ 0.83$; valori questi che mostrano quanto simili fra loro siano i risultati dei due diversi sistemi di calcolo e confermano reciprocamente la loro attendibiltà.

Dai valori degli indici calcolati si rileva anzitutto come in una stessa Nazione la concentrazione varî assai intensamente da regione a regione. In Italia queste variazioni assumono proporzioni veramente straordinarie: δ passa da 1.54 a 5.84 ed R da 26.24 a 72.06.

In generale si nota, conoscendo la struttura produttiva Italiana, che la concentrazione è assai più forte nelle regioni prevalentemente industriali che in quelle prevalentemente agricole, indipendentemente dalla loro situazione geografica.

Noi vediamo infatti che mentre si presentano come fortemente concentrate le popolazioni della Liguria, del Piemonte e della Lombardia, regioni situate nell'Italia settentrionale, assai poco concentrate sono quelle del Veneto e dell'Emilia che occupano una zona geografica poco diversa. Gli è che mentre nelle prime tre si è sviluppata una forte organizzazione industriale, la quale favorisce il concentramento delle popolazioni in punti determinati, nelle altre due l'industrializzazione è stata assai minore e le rispettive popolazioni sono dedite in maniera preponderante all'agricoltura la quale favorisce invece il loro decentramento.

Fanno eccezione a questa regola la Campania e la Sicilia, le quali malgrado sieno più dedite all'agricoltura che all'industria, pur tuttavia presentano una forte concentrazione di popolazione. Per la prima però bisogna tener conto dell'alta influenza del comune capoluogo di regione il quale contiene una delle città più popolose d'Italia e che rappresenta una proporzione rilevante sul numero totale degli abitanti della regione, per la seconda invece, — e questo vale anche per quanto in misura minore per la Campania, — la forte concentrazione è da attribuirsi a ragioni storiche, ed alle speciali condizioni di vita di quelle regioni nelle quali sia la tradizione che la necessità fanno sì che le popolazioni rurali non vivano a diretto contatto con le terre che lavorano, ma si accentrino in grossi borghi, spesso distanti decine di chilometri dalle terre stesse.

La forte concentrazione del Lazio è da attribuirsi invece al fatto che tale regione contiene la capitale del Regno, la quale, col suo

comune assorbe quasi la metà della popolazione complessiva della regione.

Per completare questo esame abbiamo voluto vedere anche in questo caso se la concentrazione fosse connessa alla densità della popolazione e se fra i due fenomeni corresse una relazione di reciproca interdipendenza.

I risultati però non furono buoni in quanto mentre in alcune regioni si manifestò forte sia la densità che la concentrazione in altre invece ad una forte densità corrisponde una bassa concentrazione.

Per cui potremo concludere che anche nelle singole regioni di una Nazione, come già vedemmo nelle varie Nazioni, il grado di concentrazione della popolazione è più attinente alle condizioni economiche e sociali peculiari delle regioni stesse che alla densità della loro popolazione.

— E con ciò il nostro studio è finito. Partendo dalle osservazioni fatte da altri autori intorno all'esistenza di una regola costante di distribuzione degli aggregati di popolazione siamo giunti a dare a questa regola un'espressione matematica la quale non solo ne esprime il significato, ma nel contempo misura l'intensità della concentrazione delle popolazioni sia considerata limitatamente a quella parte di esse che vive negli agglomerati umani, sia considerata globalmente.

Potemmo così determinare che:

a) La popolazione dei vari Stati tende ad agglomerarsi intorno a punti determinati di cui il numero varia in ragione inversa alla loro grandezza secondo una relazione costante, rappresentabile matematicamente.

b) Questa relazione tra numero degli agglomerati e la loro capacità non vale soltanto per la popolazione complessiva dei singoli Stati, ma vale anche per la popolazione delle loro varie regioni. Anche a queste è applicabile la medesima legge la cui esattezza però è tanto minore quanto più piccole sono queste regioni e quanto più scarsa la loro popolazione.

c) La concentrazione sia delle popolazioni urbane nelle città di varia grandezza, sia della popolazione totale nelle entità comunali è piuttosto forte. Gli indici che la misurano mantengono sempre valori piuttosto elevati: R il quale varia da 0 in caso di concentrazione nulla, a $+1$ in caso di concentrazione massima, assume in tutte le

Nazioni un valore superiore a $+0.50$ nei riguardi della popolazione urbana ed a $+0.40$ nei riguardi della popolazione complessiva.

d) La concentrazione varia molto da stato a stato e da regione a regione di un medesimo stato. Per l'Italia le differenze di concentrazione fra le varie regioni assumono intensità veramente ragguardevoli.

e) Il grado di concentrazione delle popolazioni per quanto sia in parte legato alla densità generale di essa pur tuttavia è più strettamente connesso alle condizioni speciali economiche delle varie nazioni e tende a modificarsi col modificarsi di queste.

f) La concentrazione dell'urbanesimo tende ad aumentare nel tempo per tutte le nazioni e così pure, per quanto in maniera meno intensa e non concorde per tutti i tempi e per tutte le Nazioni, quella della popolazione complessiva.

Questi sono i risultati del nostro studio.

Ci auguriamo che esso possa essere esteso ad altre nazioni e sopratutto che confronti possano essere istituiti con altri fenomeni in maniera che possano essere determinate più sicure relazioni di interdipendenza fra i vari aspetti della vita sociale ed il fenomeno demografico che ha formato oggetto di questa nostra paziente per quanto modesta ricerca.

W. T. RUSSELL.

A study of Irish fertility between 1870 and 1911.

That the birth-rate has declined in most European countries is a fact commonly accepted but as to the causes which have operated to bring this about, there is not the same unanimity of opinion. What, it may be asked, are the various theories regarding this decrement in fertility? I think they can be fairly well classified under three headings, 1) physiological, 2) economic, 3) volitional (1). As regards the first - the physiological - Dr. BROWNLEE was one of its chief advocates. Considering that the whole function of reproduction is physiological he felt convinced

---

(1) Since this paper was sent to press I have discovered a classic contribution to the literature on the birth-rate by Professor Corrado Gini entitled, *Decline in the Birth-rate and the fecundability of Woman*, which was published in the « Eugenics Review », January 1926.

The theory advanced to explain the progressive decline is fundamentally biological, namely, that of a progressive diminution of the reproductive capacity of the generative cells.

The limitation of procreation is considered to be, at least partially, the consequence of a weakening of the instincts of reproduction or for the rearing of children, which permits of reason taking the upper hand and controlling the procreation.

The weakening of the said instincts would be, on the other hand, a first symptom of a biological phenomenon which in the course of time would become manifest by the decrease in the aptitude of woman for conception.

According to these views the distinction between the influence of physiological, economic and volitional factors on the decrement in fertility would not be absolute, as is generally admitted, but the action of volitional and economic factors would have a physiological basis.

This paper should be read by all who are interested in the subject.

that some part of the declining birth-rate should be attributed to cyclical variation in the power to procreate, or as he happily styled it, « to rhythmic variations in germinal vitality ». In his paper, *The History of the Birth and Death-rates in England and Wales from* 1570 *to the Present Day*, published in « Public Health » in June and July, 1916, he reached the following conclusions:

1) That at two epochs centreing about the years 1600 and 1800, high birth-rates existed in England and Wales as a whole. 2) That during the intervening period centreing about 1700, the birth-rate was considerably lower. 3) That a considerable part of this oscillation in the birth-rate is an expression of race physiology. Mr. Yule professes the doctrine of the economic aspect. In his paper on *The Fall of the Birth-rate* read before the Cambridge University Eugenic Society in May 1920, he wrote as follows: - « That the course of prices is closely related to the trend of the marriage rate and of fertility, I am convinced now as I was in 1905 but am equally at a loss to suggest the precise nature of the nexus. That the nexus is economic and that it probably operates via psychology rather than directly through physiology is my view: and I doubt in fact I disbelieve, its being wholly conscious ». The theory that the cause of the decline is purely volitional, is, I think, more in accord with the general body of public opinion. Advocates of this theory assert that the birth-rate has varied less in Roman Catholic countries than elsewhere and that this is attributable to the non possumus attitude of the Roman Church as regards the usage of contraceptives. What, it may be asked, is the position of this religious body in the matter? The answer was clearly defined by Monsignor Brown in his evidence before the Birth-rate Commission. « The Church forbids the destruction of the product of conception even when the life of the mother is at stake and also all anti-physiological methods of preventing conception ». This doctrine, however much open to objection on humanitarian grounds, certainly lacks nothing in its clarity and can only mean that in a Catholic country where the tenets of this faith are strictly observed, the birth-rate must still be regarded as a measure of real fertility. Of course two obvious moderating influences, continence and the limitation to the tempus ageneseos, must be taken into account, but even making the necessary allowances for these, *a priori* it would seem that, unless other forces are at

work, the births must be linearly related to the numbers of married women at childbearing ages. For a study of fertility under such conditions, Ireland was selected as a country pre eminently suitable as there the line of religious demarcation is very well defined. In three of its provinces, namely, Leinster, Munster and Connaught, the Catholics constitute 90 per cent of the population, while in the remaining province of Ulster the proportion is barely 49 per cent.

The data utilised in the investigation were abstracted from the « Annual Returns of the Registrar-General for Ireland » and consisted of the number of legitimate births registered in the three years around each of the census years 1871, 1881, 1891, 1901 and 1911 and the number of married women between the ages 15 and 45, in quinquennial groups up to age 25 and thence in decennial groups, enumerated at each census from 1871 to 1911 in the whole country, in each province and in each county. It was not deemed advisable to include wives whose ages exceeded 45 years, as there are few children born to women beyond this limit. Up to the present it has not been possible to continue the investigation after 1911, as the figures for married women enumerated at the census in 1926 in the Irish Free State and Northern Ireland are as yet unpublished.

Having obtained the number of wives in the country as a whole, in the provinces and in the counties, in age groups, the next process consisted in calculating a measure of their fertility which would be free from the disturbing influence of any irregularity that might have taken place in their age distribution. Accordingly, the method, first used by NEWSHOLME and STEVENSON, was applied for calculating the fertility; that is, the numbers of the married women in each age period at the different censuses were multiplied by standard fertility factors. The factors utilised were the Swedish fertility rates in 1911 which measure the chance that a married woman at any given age bears a child within a year. The theoretical numbers of births were thus obtained, and these were compared with the average number of legitimate births in the three years in which the census year was intermediate. The ratio of the actual births to the theoretical or expected births was then calculated and the factor thus obtained was called the *fertility ratio*. The results now fall to be discussed. Table I shows for the country as a

whole, 1) the fertility ratio at intervals of 10 years, 2) the successive ratios expressed as a percentage of that obtaining in 1871. In 1871 the ratio was 1.034, in the succeeding interval the fertility of Irishwomen was 1.2 per cent less than that of Swedish wives in 1911 and 4 per cent below its potential value in 1871. From 1891 to 1901 the factor remained at a fixed level of 1.01 but ten years later there was an increased fertility as in 1911 the ratio reached 1.047 which is 3 per cent in excess of that in 1901 but just equal to that in 1871. We thus see that over a period of 40 years with the exception of the slight decline in 1880-82, the fertility of Irishwomen when assessed by the best standard at our disposal was practicaly constant. This is rather remarkable and offers a strange contrast to what has taken place elsewhere, as for example, in rural England, where in the same period of time the fertility diminished 30 per cent. Having studied the trend of the fertility in the country as a whole, it was next of interest to examine the course of events in each of the four provinces. The results are given in Table II. In Leinster the fertility of the married women has generally been less than that attained by Swedish wives. In 1911 there was the nearest approach to equality. From 1871 to 1901 there was no variation in fertility as the ratio had a fixed value of 0.961. In 1911 it reached 0.992 or an increase of 3 per cent on the corresponding value in 1871. Munster had a higher fertility than Sweden, and, as in the case of Leinster, the value was fairly constant over a wide period. Between 1871 and 1901 the average value was about 1.07. In 1911 the increment in fertility was only 5 per cent greater than in 1871. It is when we come to consider the figures for Connaught that the outstanding oscillation is exhibited. In 1881 the fertility ratio became less than unity though it stood at 1-063 in the previous decade. The deficit amounted to 10 per cent. This is the greatest reduction shown in any province and it is not easy to discover the causes that may have been responsible. It cannot be explained by the use of contraceptives, a practice hardly compatible with the habits and traditions of the peasant inhabitants: history, as far as I know, records no economic disturbance at this epoch apt to explain the phenomenon. Are we then to construe it as a manifestation of cyclical change? I think that the data in this case are far too limited to enable us to decide. After 1881 the ratio increased and in 1911 the

women of Connaught had a fertility 30 per cent greater than that for Swedish wives of the same period and 22 per cent in excess of that of their own countrywomen of nearly half a century ago. The results for Ulster are rather interesting as they show that there is little dissimilarity between the magnitude of its ratios and those for Leinster, although the proportions of Roman Catholics in the two provinces are quite different. The point to be especially noted about Ulster is that there has been practically no variation in the fertility since 1881. At that period it was 6 per cent less than in 1871. In 1911 the decrement is still 6 per cent.

It might possibly be urged that in regarding the province of Ulster as an entity the consequent grouping together of Catholic and non-Catholic counties would tend to obliterate any distinction in the fertility as any undue prolificity on the part of the one might counterbalance any decrease among the other and so help to explain the smallness of the decline in the fertility ratio in this total area. To obtain some information on this point the individual counties were examined. The counties of Antrim and Down were taken together to form one division. It was not convenient to treat them separately, owing to the fact that the Borough of Belfast was constituted from parts of the two counties in 1901 and this caused considerable alteration in their populations. The results of the analysis for the counties of Ulster are given in Table III. An examination of this table reveals the fact that the decreased fertility which was shown for the whole province of Ulster in 1881 is at this epoch characteristic of all the counties except Donegal, but varies in degree. Cavan and Tyrone show the greatest decline, the factors in both counties being 86 and 88 per cent respectively of those in the previous decade. Some of the counties afford interesting contrasts as for example Cavan and Armagh which have Catholic populations of 81 per cent and 45 per cent respectively. In 1871 they had fertility ratios of 1.185 and 1.216 respectively. These values declined to 1.025 and 1.139 in the next decade. In 1891 and again in 1901 the married women in the two counties had equal standards of fertility as during the interval the factor had a constant value of 0.97. Here the similarity ends as in 1911 the ratio for Cavan showed an increase of 17 per cent over that in 1901 while that for Armagh remained practically stationary.

During the whole period of forty years the fertility of the married women in the combined counties of Antrim and Down has always been less than that of Swedish wives. In 1871 the ratio was 0.965. During the succeeding interval it fell 4 per cent but in 1891 there was an increase and the ratio attained its maximum value of 0.982 which was 6 per cent greater than that prevailing in 1881. Since 1891 there has been a gradual decline, with the result that in 1911 the diminution in fertility amounted to 8 per cent as compared with the standard in 1871. The smallness of the decrement in these two counties is rather surprising and certainly offers scope for reflexion. So that its real significance may be fully appreciated, I have tabulated the corresponding values in rural Wales and these are offered for comparison in Table IV. It will be at once observed that since 1871 there has been a fairly gradual decline in fertility in rural Wales in the successive triennia as the reductions expressed as percentages of the value in 1871 are 6, 11, 22 and 29. The trend for the two Ulster counties is altogether different. In 1911 rural Wales showed a decrease of 29 per cent when compared with 1871 as against 8 per cent for Antrim and Down, two counties in which the restrictive influences of Catholic doctrine may be presumed to have little effect owing to the overwhelming proportion of the non-Catholic population. This is certainly a striking result and is contrary to what might be expected. In any study of fertility in industrial areas allowance must always be made for employment of married women in industry. Frequently, the mother's earnings are necessary to supplement the family income and it is only the limitation of the size of the family that permits her continuance in employment. In an interesting study on *The Correlation of Fertility with Social Value*, published in the « Eugenics Laboratory Memoirs » XVIII, Professor PEARSON and his co-operators have shown, that, when allowance is made for the age of the mother, there is a negative correlation between employment and size of family as in their data for the City of Birmingham the coefficient was 0.17, or in other words, unemployed mothers have, on the average, more children. Unfortunately, it is not possible to obtain the numbers of married women engaged in occupations in the two Ulster counties as the Irish Census is defective on this point, but in all probability there is greater employment of married women in Antrim and Down, the centre of the linen industry in

Ireland, than in rural Wales and this would only help to intensify the difference in fertility in the two places. Is one to deduce from these facts that contraceptive measures are more commonly used in rural Wales than in highly industralised Ulster? Such a belief is difficult to accept. Of course it might be argued that there is a racial element in this problem of the Ulster birth-rate, as the population of Ulster, and particularly that of the counties of Antrim and Down, is Scottish or of Scottish descent, but in contradiction to any argument advanced along these lines, is the undoubted fact that fertility in Scotland declined *pari passu* with that in England and Wales. In Dumfries there has been a decline of 30 per cent in 1911 as compared with that in 1871; in Orkney and Shetland and in industrial Lanarkshire fertility has declined 25 per cent and 21 per cent in the same period. There remains of course the possibility that the birth-rate in the two counties may be influenced by purely political considerations as in this corner of the country religious and political antagonisms are, or were, the order of the day. But whatever principles underlie it or actuate it, the fact still remains that there was an almost insignificant reduction in fertility in the period in question. We now turn to the analysis of individual counties of Connaught as shown in Table V where it will be seen that the married women in the later periods generally have a fertility which is much higher than that of Swedish women. The decline in 1881 which we have previously seen to be exhibited in the whole province, is now observed to be characteristic of all the counties. The increased fertility in some of the counties in 1911 as compared with 1871 is very remarkable. Sligo which had a low birth-rate in 1871 and experienced a further reduction of 13 per cent in 1881, in the next decade had a fertility just equal to that of Sweden, and in 1911 surpassed it by 29 per cent and even exceeded its own figure in 1871 by no less than 47 per cent. Galway showed an increase of 30 per cent in the ratio obtaining forty years previously. The results for Roscommon are very surprising. There was a very high fertility in this county in 1871, a fertility which exceeded the Swedish figure by 33 per cent. Since that epoch it has rapidly declined until 1901 when the ratio was 22 per cent in defect. This was the turning point, as in 1911 the fertility showed an increase of 27 per cent but it was still 10 per cent less than that in 1871. If the statistics for

this county can be accepted as accurate, and there certainly seems no obvious reason to doubt them, then the results for Roscommon are difficult to explain. The view might be advanced that the decline can have no real significance in face of the fact that the adjacent counties in the same interval showed a continuous increase in the value of their fertility ratios. If the decrement applied to only one particular epoch this line of argument would certainly claim support as either an imperfection in the registration of the births or a false enumeration of the wives might offer a solution, but the decline extends over too long a period to admit of such an explanation. What then are the outstanding points in this analysis of Irish fertility and how do they conform to existing theories? I think that the following is a fair statement of the facts.

1. That between 1871 and 1911 Irishwomen had generally a higher fertility than married women in Sweden and, that, taking the country as a whole it has been fairly constant, although in some parts there has been a decided increase in the later years of the period under review.

2. That at one period, namely, in 1880-1882 for the country as a whole, and particularly in the province of Connaught, there was a decline in fertility and that its occurrence among the strictly Catholic sections of the population is altogether opposed to the general view that a low fertility implies the use of artificial methods of preventing conception. Whether the phenomenon denotes a cyclic variation in fertility I cannot say as the range of statistics is too limited to establish such a theory. The only knowledge we have of the periodic aspect is from the writing of Brownlee who has pointed out that there are ebbs and flows in human and animal activities. In his opinion the decline in the birth-rate was chiefly an expression of rhythmic variation in vitality. It must be remembered, however, that this theory was evolved as the result of an analysis of a long series of pre-registration statistics, which, being pre-registration statistics must have been subject to errror. However, as there is in no part of the world a really reliable body of statistics over a sufficiently long series of years to confirm or refute Brownlee's view it must be regarded in the words of Newsholme « as an interesting adventure in speculative statistics ».

3. The fertility in the counties of Antrim and Down, including the Borough of Belfast, has not declined to any appreciable extent. The decrement is only 8 per cent in forty years as compared with 30 per cent in rural Wales. In these two counties, with a Catholic population comprising at the utmost 25 per cent of the total, there can be no question of the restrictive influences of Catholic principles and I can only suggest that the explanation may have a political or economic basis. From a racial and political point of view, the counties of Antrim and Down are distinct from the rest of the country and for the preservation of this characteristic a high birth-rate is essential. Again, there is the possibility that, owing to religious antagonism, the problem of employment is not so pressing among Protestant workers. Under such circumstances children are an asset, and the incentive to have large families would be just as impelling as in the case of the coal miners in this country.

TABLE I.

Showing Fertility Ratios in Ireland for Certain Periods.

Years	Fertility Ratio	Fertility Ratio as a percentage of that in 1870-72
1870–72	1.034	100
1880–82	988	96
1890–92	1.010	98
1900–02	1.009	98
1910–12	1.047	101

TABLE II.

Showing the Fertility Ratios in the Provinces of Ireland.

Catholic population as a percentage of the total	1870–72		1880–82		1890–92		1900–02		1910–12	
	Fertility ratio	Fertility ratio reduced to 100	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72
Leinster 86.	964	100	959	99	963	100	956	99	992	103
Munster 94.	1.076	100	1.060	99	1.074	100	1.084	100	1.128	105
Connaught 95.	1.063	100	954	90	1.054	99	1.097	103	1.299	122
Ulster 49.	1.035	100	972	94	985	95	975	94	971	94

TABLE III.

Showing the Fertility Ratios in the Individual Counties of Ulster.

Catholic population as a percentage of the total		1870–72		1880–82		1890–92		1900–02		1910–12	
		Fertility ratio	Fertility ratio reduced to 100	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72
Antrim, Down	25	965	100	924	96	982	102	946	98	886	92
Armagh	45	1.216	100	1.139	94	972	80	976	80	985	81
Fermanagh	56	929	100	874	94	960	103	980	105	1.068	115
Londonderry	56	1 105	100	1.025	93	1.015	92	1.041	94	1.034	94
Tyrone	56	1.110	100	979	88	994	90	983	89	1.058	95
Monaghan	75	1.069	100	1.041	97	925	87	958	90	1.090	102
Donegal	79	943	100	947	100	1.026	109	1.094	116	1.252	133
Cavan	81	1.185	100	1.025	86	974	82	978	83	1.148	97

TABLE IV.

Showing the Fertility Ratios iu Rural Wales and in the Counties of Antrim and Down including the City of Belfast.

	1870–72		1880–82		1890–92		1900–02		1910–12	
	Fertility ratio	Fertility ratio reduced to 100	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72
Rural Wales	1.067	100	1.006	94	951	89	837	78	756	71
Antrim and Down including City of Belfast. .	965	100	924	96	982	102	946	98	886	92

TABLE V.

Showing the Fertility Ratios in the Individual Counties of Connaught.

Catholic population as a percentage of the total		1870–72		1880–82		1890–92		1900–02		1910–12	
		Fertility ratio	Fertility ratio reduced to 100	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72	Fertility ratio	Fertility ratio as a percentage of that in 1870-72
Leitrim	90	972	100	882	91	1.026	106	1.063	109	1.203	124
Sligo	90	876	100	763	87	1.000	114	1.083	124	1.290	147
Roscommon	96	1.328	100	1.222	92	1.059	80	1.033	78	1.199	90
Galway	97	1.020	100	942	92	1.059	104	1.136	111	1.324	130
Mayo	97	1.085	100	945	87	1.080	100	1.106	102	1.352	125

LIEBMANN HERSCH

La population de la Palestine et les perspectives du sionisme.

§ 1. — *La superficie de la Palestine et le nombre des Juifs dans le monde.*

On s'imagine souvent que le sionisme se pose pour but de transplanter en Palestine, sinon tout le peuple juif dispersé dans le monde, du moins une importante majorité de ce peuple. C'est une erreur. Le sionisme ne tend pas vers ce but et ne peut même pas y aspirer.

En effet, la superficie de la Palestine, dans les limites qui lui sont assignées par le mandat britannique, est de 23.000 km². En y ajoutant même les régions historiques de la Palestine qui se trouvent en Transjordanie, on arrive à peine à 30.000 km² en chiffre rond. Pour nous faire une idée concrète de cette étendue, rappelons que la Suisse, p. ex., mesure 41.000 km². La Palestine a donc une étendue égale tout au plus aux $^3/_4$ de celle de la Suisse. Ce dernier pays compte un peu moins de 4 millions d'habitants (3.880.320 lors du recensement de 1920). En admettant donc que la pauvre Palestine puisse arriver, dans un avenir prévisible, à un niveau de bien-être et de haute culture matérielle pareil à celui de la Suisse contemporaine, elle pourrait avoir tout au plus une population de 3 millions d'individus ($^3/_4$ de 4 millions). Notons encore que la Palestine compte déjà aujourd'hui env. 700.000 habitants non-juifs. Dans les conditions très favorables et peu probables que nous venons d'admettre, il y aurait donc de la place en Palestine tout au plus pour 2 $^1/_4$ millions de Juifs.

Or, le total des Juifs des divers pays du monde est aujourd'hui évalué à environ 16 millions. Il est donc de toute évidence que dans le meilleur des cas une faible minorité seulement du peuple juif pourrait être ramenée en Palestine, et que l'immense majorité des Juifs restera nécessairement dans les pays de la « diaspora ».

Mais il y a plus. L'accroissement naturel des Juifs du monde entier ne doit pas être de nos jours inférieur à 150.000 par an. Comme l'imagination sioniste la plus hardie, la moins réaliste, ne va pas jusqu'à croire qu'on puisse transporter en Palestine 150.000 Juifs par an, il est donc clair que l'immigration juive en Palestine ne peut embrasser, dans les conditions les plus propices, qu'une notable partie de l'accroissement naturel de la population juive, et que les 16 millions de Juifs qui se trouvent dans les divers pays du monde y resteront en tout cas. Sous ce rapport, ni Juifs ni autres ne peuvent donc se faire aucune illusion.

Aussi le sionisme n'aspire-t-il pas en réalité à transporter la majorité des Juifs en Palestine, mais à *créer en Palestine une majorité juive*, ce qui est naturellement tout autre chose. Le sionisme tend ainsi à faire de la Palestine un Etat juif, basé sur une majorité juive parmi la population du pays, majorité qui doit être créée par une immigration systématique de Juifs.

Ce sont les possibilités de réaliser ce projet que nous chercherons à examiner à la lumière des statistiques de la population.

§ 2. — *La population actuelle de la Palestine.*

La Palestine a eu un seul recensement de sa population, le 23 octobre 1922. D'après ce recensement, il y avait en Palestine :

Juifs		*83.794*
Non-Juifs :		
Mahométans	590.890	
Chrétiens	73.024	
Autres	9.474	
Non-Juifs en tout		*673.388*
Habitants au total		*757.182*

Au moment du recensement, les Juifs étaient ainsi 11,1 p. 100, soit presque exactement $^1/_9$, de la population. Sur un habitant juif, il y avait donc 8 non-juifs. *La supériorité absolue du nombre de la population non-juive sur celui des Juifs était de près de* 600.000 *en chiffre rond* (673.388 — 83.794 = 589.594).

Tels sont les chiffres fournis par le recensement. Nous savons cependant que les populations qui n'ont pas encore l'habitude des recensements ont une méfiance pour ainsi dire instinctive à l'égard de tout dénombrement de population, et cherchent plutôt à lui échapper. On doit ainsi admettre, d'après les expériences répétées de tant

d'autres pays, que surtout la population arabe, la moins habituée aux dénombrements, doit dans la réalité être dans une sensible mesure plus nombreuse qu'elle ne paraît d'après le recensement. Les lacunes du recensement devaient être importantes surtout pour les *nomades*, (du fait, qu'ils n'ont pas de domicile stable) qui, d'après le recensement, constituaient un peu plus du sixième (17,5 %) de toute la population musulmane de la Palestine (leur nombre relevé par le recensement fut de 103.331).

En réalité, la prépondérance numérique de la population non-juive a donc probablement été sensiblement plus élevée que ne le montrent les données du recensement. Mais ne connaissant pas, même approximativement, l'importance des lacunes du dénombrement palestinien, nous nous abstenons de toute évaluation arbitraire et, dans la suite, nous nous baserons sur les chiffres fournis par le recensement.

Cette supériorité numérique d'environ 600.000 qu'ont les non-Juifs en Palestine doit donc avant tout être supprimée par l'immigration juive pour que les Juifs puissent devenir la majorité de la population du pays.

§ 3. — *Les migrations contemporaines des Juifs.*

A première vue, une pareille tâche paraît tout-à-fait à la portée du mouvement migratoire des Juifs contemporains. En effet, les Juifs se trouvent de nos jours au premier rang des peuples migrateurs, et cela non seulement d'aprés l'intensité relative de leur émigration (émigrants par rapport au chiffre de la population), mais aussi d'aprés le nombre absolu des émigrants (1). Pour donner quelque idée de ce formidable mouvement migratoire, il suffira ici de mentionner quelques faits seulement:

Pendant les 16 années qui ont précédé la guerre mondiale et pour lesquelles on possède des statistiques officielles (1899-1914), le nombre des Juifs immigrés aux Etats-Unis a été de près d'un million et demi (1.485.641). Sauf les Italiens, aucun autre peuple du monde n'a envoyé aux Etats-Unis, pendant la même période un

---

(1) Voyez surtout: Hersch, *Le Juif errant d'aujourd'hui* Etude sur l'émigration des Israélites de l'Europe Orientale aux Etats-Unis de l'Amérique du Nord. Avec 40 tableaux statistiques et 9 diagrammes Paris (Giard), 1913. — Un complément à cet ouvrage, avec des données récentes, est sous presse aux Etats-Unis.

nombre semblable d'émigrants. Cette constatation se trouve encore accentuée du fait que chez aucun autre peuple l'émigration temporaire n'est si peu développée que chez les Juifs. Avant la guerre, en moyenne les 95% des Juifs immigrés aux Etats-Unis étaient des immigrants définitifs. Aujourd'hui, avec les restrictions à l'immigration aux Etats-Unis c'est à peine 1 % des immigrants juifs qui quitte ce pays. Les Etats-Unis comptent aujourd'hui plus de 3 $^1/_2$ millions d'habitants juifs, (1), c'est-à-dire plus que n'importe quel autre pays du monde, plus même que l'Union Soviétique ou que la République Polonaise. La ville de New York compte à elle seule près de deux millions de Juifs.

Un pareil flot migratoire, s'il se dirigeait vers la Palestine, submergerait vite la population arabe du pays et le transformerait effectivement en un « pays d'Israël », si seulement la Palestine était capable d'absorber une immigration en masse, en particulier si elle pouvait absorber la masse des migrants juifs avec leurs caractères propres.

Un concours de circonstances qu'on serait tenté de qualifier de providentiel semblait favoriser d'une façon toute particulière la canalisation de ce mouvement vers la Palestine.

D'un côté, le besoin d'émigrer était chez les Juifs après la guerre plus fort que jamais. Pendant les longues années de la guerre (qui en Europe Orientale a duré, par suite de la guerre russo-polonaise, jusqu'à fin 1920), toute émigration fut suspendue; de ce seul fait, elle paraissait devoir prendre un essor particulier dès que les écluses fermées par la guerre se rouvriraient. Mais il y avait plus. La guerre qui, sur le front oriental, se déroulait dans les régions ayant de compactes populations juives a accumulé des misères qui poussaient à l'émigration. Les révolutions et les contre-révolutions politiques et sociales qui se succédaient dans cette partie de l'Europe, ont achevé la ruine économique des masses juives qui, dans l'Europe centrale et orientale, se composent presque exclusivement de petits bourgeois et d'ouvriers de la petite industrie. Les pogromes qui accompagnaient ces mouvements révolutionnaires et contre-révolutionnaires, pogromes qui furent plus nombreux et plus sanglants que tous ceux qui les ont précédés pendant des siècles, provoquèrent un terrible sauve-qui-peut parmi la population juive.

Et, d'un autre côté, juste à ce moment quand le besoin d'émi-

(1) M. Lestchinsky évalue ce nombre pour 1925, à 4 millions (« Blätter für Demographie, Statistik u. Wirtschaftskunde der Juden » No 5, Berlin 1295).

gration était devenu si aigu, les Etats-Unis fermèrent leurs portes devant l'immigration venant de l'Est et du Sud de l'Europe. Le nombre des immigrants juifs, qui avant la guerre avait largement dépassé 100.000 par an, fut par les mesures restrictives réduit, coup sur coup, à environ 50.000 par an à partir de l'année fiscale 1922 (juillet 1921-juin 1922) et à environ 10.000 par an, à partir de juillet 1924 (1). Les Etats-Unis qui recevaient jusque-là les trois quarts environ des migrants juifs ont pour ainsi dire disparu pour les masses juives qui scrutaient l' horizon en se demandant anxieusement: où aller?

A ce même moment, les Turcs furent définitivement chassés de la Palestine; le pouvoir sur ce pays passa aux Anglais qui s'engagèrent à y établir un foyer national juif; à la tête du gouvernement du pays fut placé un Juif sympathisant activement avec le sionisme; un profond mouvement d'enthousiasme pour la Terre Sainte s'empara des masses populaires juives qui ne comptaient pas les sacrifices matériels et dont la jeune génération, oubliant ses intérêts personnels et les habitudes séculaires de la population juive, allait souvent, au prix de sa santé et de sa vie, défricher le sol désertique de la Palestine; l'organisation sioniste encourageait et soutenait de tout son pouvoir matériel et moral l'immigration et l'établissement des Juifs dans ce pays.

Il semble donc juste d'admettre que l'immigration juive en Palestine telle qu'elle s'est produite après la guerre, et notamment depuis la fermeture des Etats-Unis, représente l'immigration que la Palestine peut attirer vers elle dans des conditions exceptionnellement favorables pour son peuplement juif.

Quelle fut donc cette immigration?

§ 4. — *Quelques remarques au sujet des statistiques des migrations palestiniennes.*

Les statistiques officielles des migrations commencent avec l'année 1922, c'est-à-dire au moment précis où l'immigration juive

---

(1) Le nombre *annuel* des Juifs immigrés aux Etats-Unis a été de:

108679	en	1904-1914
13328	»	1915-1920
119036	»	1921
51077	»	1922-1924
10292	»	1925

(D'après les *Annual Reports of the Commissioner General of Immigration*, Washington).

aux Etats-Unis fut réduite, par les premières grandes restrictions, à moins d'une moitié de son niveau précédent.

Les statistiques palestiniennes se rapportent aussi bien à l'immigration qu'à l'émigration. Dans un cas comme dans l'autre, les chiffres concernent uniquement les migrants proprement dits, c'est-à-dire les personnes qui viennent au pays pour y rester d'une façon permanente (immigrants) et les individus qui quittent le pays également d'une façon définitive (émigrants). Les simples voyageurs et les touristes ne sont pas compris dans ces statistiques. Si toutefois un « voyageur » veut, après son arrivée, rester au pays d'une façon permanente, il est enregistré comme immigrant au moment où l'autorisation de rester lui est délivrée. Le nombre de pareils « voyageurs » devenus « immigrés » est trés important. Ainsi par exemple pendant le dernier mois pour lequel nous avons des données au moment où nous écrivons ces lignes, c'est-à-dire pendant le mois de décembre 1927, sur 253 immigrants enregistrés, 106 soit plus de 40 p. 100 étaient d'anciens voyageurs restés dans le pays. Ce procédé d'enregistrement est tout-à-fait logique. Et il devrait en être de même pour ceux qui *quittent* le pays en « voyageurs » et qui restent ensuite à l'étranger d'une façon permanente. Il est pourtant pratiquement presque impossible de contrôler le nombre de ces derniers. Aussi les statistiques palestiniennes ne tiennent - elles aucun compte des nombreux « voyageurs » devenus émigrés après leur sortie du pays. Les statistiques de l'émigration comprennent uniquement ceux qui au moment de quitter le pays sont considérés comme émigrants. Il s'ensuit donc que *l'émigration réelle de la Palestine est bien supérieure à celle qui est enregistrée par la statistique palestinienne.* Il s'ensuit de même qu'un bilan des migrations établi d'après l'immigration et l'émigration enregistrées serait loin d'être correct: *il majorerait systématiquement et fortement l'immigration nette véritable*, c'est-à-dire qu'il présenterait le mouvement migratoire d'une façon qui paraîtrait systématiquement et fortement plus favorable au sionisme qu'il ne l'est dans la réalité.

Les statistiques des migrations palestiniennes ont encore d'autres imperfections. La plus importante au point de vue du problème qui nous occupe ici paraît être la suivante (bien que cette imperfection ne soit pas du tout une particularité de la Palestine): le contrôle des migrations par la frontière terrestre est infiniment plus difficile et moins strict que celui des migrations par mer. Il s'ensuit que les statistiques des migrations palestiniennes sont *incomparablement*

plus complètes pour les Juifs (et les chrétiens), qui viennent et s'en vont presque tous par mer, *que pour les Arabes*, dont les migrations s'effectuent sortout par voie de terre (entre les régions voisines, telles que la Syrie ou la Transjordanie, et la Palestine). Ici encore, il est donc bien possible que les statistiques présentent les migrations palestiniennes sous un jour plus favorable au sionisme qu'elles ne le sont effectivement.

Mais malgré ces défauts qui ne sont nullement négligeables (et certains autres qu'on pourrait encore signaler), nous nous abstiendrons de toute rectification arbitraire et nous nous baserons dans la suite uniquement sur les statistiques existantes qui, tout en s'écartant de la réalité plutôt dans un sens déterminé, n'en constituent pas moins les seules données positives sur notre problème.

§ 5. — *L'immigration en Palestine* (1).

L'immigration annuelle en Palestine s'exprime, pour la période 1922-1927, par le tableau suivant :

Années	Immigrants			Juifs % immigrants
	au total	juifs	autres	
1922	8.128	7.844	284	96.5
1923	7.991	7.421	570	92.9
1924	13.553	12.856	697	94.9
1925	34.641	33.801	840	97.6
1926	13.910	13.080	830	94.0
1927	3.595	2.713	882	75.5
1922/27	81.818	77.715	4.103	95.0

Commençons par l'immigration *non-juive*. D'après les statistiques palestiniennes, elle est, comme nous voyons, de très faible im-

(1) Les données sur les migrations sont prises dans les rapports mensuels publiés dans *Official Gazette of the Government of Palestine*, Jérusalem.

portance. Pendant les six années 1922-1927, ont immigré en tout 4.103 non-Juifs, soit un peu moins de 600 personnes par an. Les non-Juifs ne constituent en moyenne que 5 p. 100 des immigrants en Palestine. Il faut cependant noter l'accroissement pour ainsi dire constant de cette immigration qui, de 284 en 1922, s'éleva à 882 en 1927. Sous ce rapport, elle présente un contraste frappant avec l'immigration juive qui, elle, a eu une allure excessivement irrégulière.

Pour ce qui concerne l'immigration *juive*, nous pouvons faire les constatations suivantes:

1. Pendant les six années 1922-1927, ont immigré en tout en Palestine 77.715, soit environ 13.000 par an en moyenne. Nous sommes excessivement loin de cette immigration aux Etats-Unis qui, avant le régime restrictif, dépassait les 100.000 annuellement.

2. Ce chiffre de 13.000 constitue une moyenne « fictive », car la courbe de l'immigration juive a été extrêmement irrégulière. La seule année 1925 amena une immigration de près de 34.000; les cinq autres années réunies n'ont apporté ensemble que 44.000 immigrants juifs, soit moins de 9.000 par an.

3. L'immigration juive qui, de 7 à 8 mille par an en 1922 et 1923, s'éleva brusquement à 34.000 en 1925 retomba plus brusquement encore à 3.600 en 1927.

Cette chute marquerait-elle la ruine de tout le système d'immigration juive en Palestine? Une pareille conclusion serait pour le moins prématurée. Quant à nous, le recul formidable de 1927 nous paraît intimement lié à la hausse inopinée et irréfléchie de 1925, c'est-à-dire à un phénomène passager qui n'a ancune chance de se répéter; nous croyons donc que le bas niveau de 1927 n'a pas non plus de chances de durer.

Mais que s'est-il produit en 1925? Quelques renseignements historiques ne seront peut-être pas déplacés ici.

L'immigration juive poursuivant une renaissance hébraïque en Palestine était dès le début, c'est-à-dire encore sous le régime turc, un retour non seulement à la Terre Sainte, mais aussi à la terre tout court, à l'agriculture. De la part d'une population essentiellement urbaine, le travail aride d'une terre désertique exigeait des sacrifices particuliers. Le nombre des idéalistes capables d' un pareil effort était nécessairement restreint, et c'est surtout parmi la jeunesse studieuse que se recrutaient les colons. Il est vrai, des éléments petits bourgeois, artisans, petits commerçants ainsi que simples ouvriers, allaient également en Palestine s'établissant surtout dans

les villes. Mais le nombre des petits bourgeois pouvant ainsi gagner leur vie en Palestine étant fort limité, toute l'immigration juive était par suite, numériquement, de peu d'importance. Après l'établissement du pouvoir britannique, la proclamation du « foyer national juif » et surtout après la fermeture des Etats-Unis devant les masses d'immigrants juifs (juillet 1924), la propagande sioniste chercha à diriger sur la Palestine les masses d'éléments commerçants et industriels qui se voyaient acculées à l'émigration et ne savaient pas où aller. L'immigration en Palestine de petits bourgeois et d'ouvriers industriels monta ainsi brusquement dès la seconde moitié de 1924, et atteignit son point culminant en 1925; elle se prolongea encore, quoique déjà dans une mesure moindre, pendant la première moitié de 1926 (1). Mais cette immigration en grand nombre d'éléments se dirigeant vers les villes, connue chez les Juifs sous le nom de la « quatrième Aliah » (la quatrième vague d'immigration), fut une expérience désastreuse: les villes palestiniennes n'avaient aucune possibilité d'absorption d'une telle immigration en masse qui ne tarda pas de provoquer une profonde crise et un terrible chômage qui paralysèrent l'immigration juive en Palestine. De cette crise, on ne voit pas encore la fin; on n'aperçoit même pas encore quelque amélioration de la situation. Mais comme il semble qu'une expérience pareille à celle de la « 4me Aliah » ne poura pas être renouvelée, même si quelqu'un le voulait, il paraît que la situation finira probablement par s'arranger et que l'immigration juive pourra bien reprendre l'étendue, modeste il est vrai, d'avant la « quatrième vague » (de 7 à 8 mille par an en 1922, 1923 et le premier semestre de 1924).

(1) Voici le nombre des immigrants juifs en Palestine par semestres:

Janvier-juin 1923	4.685
Juillet-décembre 1923	2.736
Janvier-juin 1924	3.677
Juillet-décembre 1924	9.179
Janvier juin 1925	1[illegible].438
Juillet-décembre 1925	18.363
Janvier-juin 1926	9.395
Juillet-décembre 1926	3.685
Janvier-juin 1927	1.363
Juillet-décembre 1927	1.350

§ 6. — *L'émigration de la Palestine.*

Mais outre l'immigration en Palestine, il y a encore l'émigration de la Palestine. D'aprés le tableau suivant, nous pouvons nous rendre compte de l'importance de l'émigration enregistrée.

Années	Emigrants			Juifs °/₀ émigrants
	Au total	Juifs	Autres	
1922	2.939	1.503	1.436	51.1
1923	4.847	3.466	1.381	71.5
1924	3.702	2.037	1.665	55.0
1925	4.100	2.151	1.949	52.5
1926	9.429	7.464	1.965	79.2
1927	6.978	5.071	1.907	72.7
1926-27	31.995	21.692	10.303	67.8

Ici encore commençons par l'émigration non-juive. *Pour autant que l'on peut, sous ce rapport, se fier aux statistiques palestiniennes,* on peut faire les constatations suivantes:

1° Pendant les 6 années considérées, plus de 10.000 non-juifs ont émigré de la Palestine, ce qui fait une émigration annuelle moyenne d'environ 1.700 personnes. L'émigration de non-juifs de la Palestine serait donc environ 2 fois et demie plus élévée que leur immigration (voir tableau § 5). Ce fait paraît indiquer qu'en elle-même, sans les énormes et multiples sacrifices collectifs et individuels qu'on fait chez les Juifs en vue du peuplement de la Terre Sainte, la Palestine serait un pays d'émigration plutôt qu'un centre d'immigration.

2° La courbe de l'émigration non-juive a une allure relativement régulière et tend, d'une façon marquée, à monter.

Cependant, les dimensions de l'émigration non-juive restent fort restreintes. Bien plus importante est l'émigration *juive.* Nous constatons en effet:

1° Pendant les 6 années 1922-27 ont émigré de la Palestine 21.700 Juifs, soit en moyenne 3.600 par an.

2° Cette émigration fut particulièrement forte à la fin de la

période envisagée, en 1926 et 1927, lorsqu'elle a été respectivement d'environ 7.500 et 5.000 individus par an.

Ici encore nous ne croyons pas qu'on ait droit de conclure à une tendance générale de l'émigration juive à monter. La hausse brusque de l'émigration en 1926 paraît être en effet le résultat immédiat de la malheureuse expérience de la « 4me Aliah » qui, comme nous l'avons vu, avait atteint son point culminant en 1925. Dès que les conséquences néfastes de cette expérience aventureuse auront passé, l'émigration extraordinaire prendra sans doute fin elle aussi.

Il est cependant à noter qu'une émigration juive de plus de 2.000 par an avait lieu en Palestine même avant la crise provoquée par la « 4me Aliah », en 1922-1925. Déjà alors les Juifs, qui n'étaient qu'un neuvième de la population constituaient la majorité absolue des émigrants. Les Juifs étaient ainsi environ dix fois plus fortement représentés parmi les émigrants que parmi les habitants du pays.

Il est vrai, les émigrants juifs de la Palestine sont surtout des réémigrants, c'est-à-dire des immigrés qui quittent le pays; on ne saurait donc les assimiler tels quels aux autochtones qui émigrent. Mais le fait même d'une telle différence entre les immigrés juifs et la population indigène, les uns émigrant relativement dix fois plus que l'autre, est en lui-même hautement significatif. Et notons bien que nous avons obtenu ce chiffre en ne faisant pas entrer en ligne de compte l'extraordinaire émigration juive de 1926 et 1927.

D'un autre côté, les réémigrants juifs n'appartiennent nullement à la catégorie des immigrants dits « temporaires » qui viennent dans le pays d'immigration dans le but d'y faire des économies et de retourner ensuite au pays natal. Les immigrants temporaires sont en général extrêmement rares parmi les Juifs; nous avons vu, par exemple, que les 95 % des Juifs immigrés aux Etats-Unis y sont restés pour toujours et que depuis la guerre à peine 1 % des Juifs immigrés quitte ce pays. Les Juifs qui vont en Palestine vont tous pour y rester. Les réémigrants ne sont pas des personnes qui auraient fait fortune en Palestine; ce sont des hommes qui y ont laissé le petit avoir qu'ils avaient apporté avec eux à leur arrivée, qui, par les nécessités économiques, sont *forcés* de quitter le pays, qui voient leurs forces épuisées et leur idéal brisé par l'inexorable réalité palestinienne. Ce sont des naufragés, de véritables épaves économiques et morales que les ondes bleues de la Méditerranée emportent des bords de la Terre promise. Ils semblent être aussi des preuves vivantes que les 7 à 8 mille Juifs par an qui immigraient en Palestine avant l'aven-

tureuse « quatrième vague » dépassaient déjà le pouvoir d'absorption du pays, qu'ils le dépassaient de deux mille environ par an (chiffre des émigrants que la Palestine rejetait déjà alors). Rien d'étonnant donc que l'aventure de 1925 amena à sa suite une paralysie de l'immigration et une recrudescence formidable de l'émigration.

§ 7. — *Les bilans annuels des migrations juives de la Palestine.*

Quelle que soit la compassion qu'éveille le sort des deux dizaines de mille de naufragés qui ont dû s'enfuir de la Palestine, ce qui importe surtout au point de vue du peuplement juif de la Palestine, c'est le bilan des migrations, l'excédent de l' immigration sur l'émigration ou, en d'autres termes, l'immigration nette. Nous pouvons nous en rendre compte d'après le tableau que voici:

Les migrations juives en Palestine (1922-1927)

Années	Immigrants	Emigrants	Excédent de l'Immigration (+) ou de l'émigration (—)	Emigrants p. 100 immigrants
1922	7.844	1.503	+ 6.341	19
1923	7.421	3.466	+ 3.955	47
1924	12.856	2.037	+ 10.819	16
1925	33.801	2.151	+ 31.650	7
1926	13.080	7.464	+ 5.616	57
1927	2.713	5.071	— 2.358	187
1922-27	77.715	21.692	+ 56.023	28

On constate ainsi:

1° Pour toute la période 1922-27, l'immigration nette des Juifs en Palestine fut de 56.000, soit d'un peu plus de 9 mille par an en moyenne.

2° Il est cependant facile à voir que le chiffre de 9 mille est une moyenne parfaitement fictive. Car sur les 56.000 qui consti-

tuent l'immigration nette de toute la période considérée, 31.650 soit 56,5 % reviennent à la seule année 1925 (dont les effets désastreux sont, en outre, encore loin d'être finis). Les cinq autres années réunies ont donné ensemble une immigration nette de 25.000, soit de 5.000 par an. Avant la « 4me Aliah », en 1922, 1923 et le premier semestre 1924, l'immigration nette oscillait entre 4 et 6 mille par an.

3° La dernière année (1927) — sous l'influence apparente de l'aventureuse immigration de 1925 — a donné un fort excédent d'émigration (de 2.358 personnes).

4° Déjà avant 1925, l'émigration emportait une forte portion de l'immigration. Mais en 1926, elle en enleva plus d'une moitié (57 %) ; en 1927 le nombre des émigrants a été presque le double de celui des immigrants (187 %). On saisit toute la signification de ces chiffres si l'on se rappelle qu'aux Etats-Unis, même avant la guerre, sur 100 immigrants juifs il n'y avait que 5 émigrants (pour les Etats-Unis le *maximum* relatif d'émigrants juifs fut observé pendant l'année de la grande crise 1908-1909 lorsque sur 100 immigrants juifs il y eut 11 émigrants).

Encore ne doit-on pas oublier que les statistiques palestiniennes relatives à l'émigration sont, comme nous l'avons observé plus haut (§ 4), sensiblement moins complètes que celles qui touchent à l'immigration. Dans la réalité le bilan du mouvement migratoire est donc encore bien moins favorable que ne le montre notre tableau.

§ 8. — *Bilans mensuels du mouvement migratoire.*

Mais les chiffres annuels ne nous permettent pas encore de nous faire une idée suffisamment nette des migrations palestiniennes, car comme nous l'avons vu (§ 5, note), la « quatrième vague » a commencé avec la seconde moitié de 1924 et ne s'est terminée qu'avec la première moitié de 1926. En prenant les totaux annuels, nous confondons donc l'état antérieur à cette vague (en 1924) et consécutif à la vague (en 1926) avec la période de « la 4me vague » elle-même. Pour mieux voir les effets de cette désastreuse expérience, il faut examiner le phénomène par semestre, ou mieux encore par mois. Voici quelles furent les *migrations mensuelles des Juifs en Palestine pour les deux dernières années* (1926 et 1927):

Années et mois	Immigrants	Emigrants	Excédent de l'immigration (+) ou de l'émigration (—)	Emigrants °/o Immigrants
1926 :				
Janvier	1.590	218	+ 1.372	14
Février	1.405	359	+ 1.046	26
Mars	2.230	339	+ 1.891	15
Avril	1.415	384	+ 1.031	27
Mai	1.515	452	+ 1.063	30
Juin	1.240	603	+ 637	49
Juillet	735	840	— 105	114
Août	825	960	— 135	116
Septembre	630	795	— 165	126
Octobre	589	1.051	— 462	178
Novembre	457	821	— 364	180
Décembre	449	642	— 193	143
1927 :				
Janvier	134	467	— 333	349
Février	161	282	— 121	175
Mars	228	649	— 421	285
Avril	256	149	+ 107	58
Mai	273	485	— 212	178
Juin	311	565	— 254	182
Juillet	223	383	— 160	172
Août	190	571	— 381	305
Septembre	272	465	— 193	171
Octobre	189	386	— 197	204
Novembre	306	407	— 101	133
Décembre	170	262	— 92	154
1926 :				
Janvier-Juin	9.395	2.355	+ 7.040	25
Juillet-Décembre	3.685	5.109	— 1.424	139
1927 :				
Janvier-Juin	1.363	2.597	— 1.234	191
Juillet-Décembre	1.350	2.474	— 1.124	183

Notons en particulier que :

1° Le revirement du mouvement migratoire, la transformation du bilan positif en un bilan négatif, s'opéra dès le mois de juillet 1926.

2° A partir de cette date, le mouvement migratoire n'a cessé de se solder, chaque mois, par un excédent d'émigration. Certains mois le nombre enregistré des émigrants juifs de la Palestine atteignait même le triple de celui des immigrants. De toute cette phase destructive pour le peuplement juif de la Palestine, dont on ne voit pas encore la fin, un seul mois paraît faire exception à la règle: ce fut le mois de pâques (avril 1927) lorsque sur 100 immigrants, il y eut « seulement » 58 émigrants. Et encore cette exception ne s'est-elle réalisée que grâce à l'accroissement de l'émigration le mois précédent (mars 1927).

§ 9. — *Résumé des données relatives aux migrations.*

Même dans les conditions historiques exceptionnellement favorables dans lesquelles s'est effectuée l'immigration juive, la Palestine, recevant 7 à 8 mille immigrants par an, en rejettait deux mille. La tentative d'y faire entrer trois dizaines de mille en une année (1925) ne tarda pas dans ces conditions à provoquer dans le pays une terrible crise qui transforma le mouvement d'immigration en un mouvement d'émigration. Voici 18 mois que chaque mois, sans discontinuer, apporte un nouvel excédent d'émigration. Un signe positif d'amélioration n'est guère encore perceptible. Pour l'avenir *immédiat*, il faut donc encore prévoir une immigration nette à peu près nulle si ce n'est un solde négatif.

Nous ne croyons cependant pas qu'on ait des preuves suffisantes pour affirmer en général la fin de l'immigration juive en Palestine. Il paraît beaucoup plus probable qu'il s'agit là d'une crise grave, mais temporaire, provoquée par un phénomène sporadique (l'immigration renforcée de 1925). Cette crise une fois passée, il semble donc qu'aux prix des sacrifices énormes assumés par la population juive, la Palestine (qui paraît être un pays de faible émigration plutôt que d'immigration), pourra retrouver son immigration nette de 5 à 6 mille Juifs comme c'était le cas avant la « quatrième vague ».

Mais pour qu'une *telle* immigration arrive à compenser la prépondérance numérique de 600.000 individus que la population non-juive de la Palestine a sur les Juifs de ce pays, il faudrait un temps

indéfiniment long (plus de cent ans). En d'autres termes, dans un avenir qui se laisse tant soit peu prévoir, une majorité juive parmi la population de la Palestine paraît bien irréalisable.

§ 10. — *Le mouvement naturel de la population palestinienne: chiffres absolus.*

Mais outre le mouvement migratoire — et avant lui — il y a le mouvement naturel de la population. Les données sur les naissances et les décès en Palestine selon les confessions des habitants existent à partir de l'année 1923. Les dernières données qui viennent d'être publiées se rapportent à l'année 1926. Nous possédons ainsi des données pour quatre années consécutives: 1923-26 (1).

Malheureusement, ces données concernent uniquement le mouvement naturel de la population *sédentaire*. Pour les nomades, les données font complètement défaut. Nous pensons que nous nous rapprocherons le plus de la réalité en attribuant à la population nomade un accroissement naturel proportionnel à celui constaté chez la population musulmane sédentaire. Le nombre des nomades étant égal, d'après le recensement, à un peu plus du cinquième du nombre des musulmans sédentaires (resp. 103.331: 487.589 = 21,2 p. 100), nous compterons donc pour les nomades un accroissement égal aussi au cinquième de celui enregistré pour les musulmans sédentaires.

D'un autre côté, il est à peine douteux que chez des populations comme les Arabes, qui jusqu'ici n'avaient nullement l'habitude des registres de l'état civil, l'enregistrement ne peut pas être complet dès le début. On doit donc admettre que le nombre réel des naissances et des décès a été chez les Arabes — surtout au début — sensiblement supérieur à celui relevé par les statistiques. Nous n'avons cependant aucune base positive pour rectifier cette inexactitude. Ici encore, nous prendrons donc tels quels les chiffres fournis par les rapports officiels.

Quel est donc le mouvement naturel de la population palestinienne ainsi établi? C'est ce que nous voyons d'après le tableau suivant:

---

(1) Pour les années 1923 et 1924 nos données sont puisées dans *Official Gazette of the Government of Palestine* du 16 septembre 1925. Pour 1925 et 1926 nous avons utilisé: GOVERNMENT of PALESTINE, *Annual Report of the Department of Health for the year* 1925, p. 11 et *id. for* 1926, pp. 10-12, et les tableaux annexes.

	1923	1924	1925	1926	1923-26 (en moyenne)
A. CHEZ LES SÉDENTAIRES:					
1. *En tout*:					
Naissances.	31.402	34.955	35.479	40.741	35.644
Décès	16.994	17.672	19.611	18.620	18.224
Accroissement naturel .	14.408	17.283	15.868	22.121	17.420
2. *Chez les Juifs :*					
Naissances.	3.276	3.623	4.000	5.299	4.049
Décès	1.310	1.196	1.817	1.782	1.526
Accroissement naturel .	1.966	2.427	2.183	3.517	2.523
3. *Chez les musulmans :*					
Naissances.	25.147	28.048	28.211	31.949	28.339
Décès	14.424	15.085	16.119	15.186	15.204
Accroissement naturel .	10.723	12.963	12.092	16.763	13.135
4. *Chez les chrétiens :*					
Naissances.	2.566	2.969	2.777	3.025	2.834
Décès	1.135	1.235	1.406	1.355	1.283
Accroissement naturel .	1.431	1.734	1.371	1.670	1.551
5. *Chez les autres :*					
Naissances.	413	315	491	468	422
Décès	125	156	269	297	212
Accroissement naturel .	288	159	222	171	210
B. CHEZ LES NOMADES :					
Accroiss. naturel calculé .	2.145	2.593	2.418	3.353	2.627
C. POPULATION ENTIÈRE:					
Accroissement naturel :					
au total	16.553	19.876	18.286	25.474	20.047
chez les non-juifs. . .	14.587	17.449	16.103	21.957	17.524
» » juifs	1.966	2.427	2.183	3.517	2.523
Excédent de l'accroissement naturel des non-juifs sur celui des juifs	12.621	15.022	13.920	18.440	15.001

Nous laissons au lecteur le soin d'examiner dans leurs détails les diverses constatations que renferme notre tableau. Pour la question qui nous occupe ici sont importants surtout les faits suivants:

L'accroissement naturel de la population palestinienne est de nos jours d'environ 20.000 individus par an. Sur ce chiffre, environ 17.500 reviennent à la population non-juive et 2.500 aux Juifs. En d'autres termes, *l'accroissement naturel de la population non-juive dépasse celui de la population juive de* 15.000 *individus par an.*

Dans ces conditions, une immigration annuelle nette de 5 a 6 mille Juifs, ou même de 9 mille, n'approche nullement l'arrivée du jour où les Juifs seraient la majorité des habitants de la Palestine. Au contraire, *la supériorité numérique absolue de la population non-juive continue dans ces conditions à croître.*

§ 11. — *Le mouvement naturel de la population palestinienne: chiffres relatifs.*

Nous ne connaissons pas la structure par âge des diverses populations palestiniennes. Nous pouvons donc rapporter les nombres des naissances et des décès ainsi que ceux de l'accroissement naturel seulement au total des habitants des divers groupes confessionnels qui peuplent le pays. Cependant, à défaut de coefficients plus précis, les taux généraux de la natalité, de la mortalité et de l'accroissement naturel conservent une certaine valeur en eux-mêmes et ne sont pas non plus dépourvus d'intérêt pour notre problème.

Ces taux sont donnés dans les Rapports cités du Département de la Santé du gouvernement palestinien pour les années 1925 et 1926. Le nombre de la population pris en considération pour le calcul de ces taux fut établi par les dits Rapports pour le milieu de chaque année sur la base des données du recensement du 23 octobre 1922 en y ajoutant l'excédent des naissances sur les décès et la différence entre l'immigration et l'émigration depuis le moment du recensement. Voici le tableau que l'on obtient ainsi:

Naissances vivantes, décès et accroissement naturel en Palestine pour 1000 *habitants de chaque groupe confessionnel* (1925 et 1926). (nomades non compris).

	Naissances		Décès		Acroissement naturel	
	1925	1926	1925	1926	1925	1926
Chez les Juifs. . .	33.2	36.0	15.1	12.1	18.1	23.9
» » non-Juifs :						
Musulmans	54.7	60.2	31.2	28.6	23.5	31.6
Chrétiens	37.2	40.0	18.8	17.9	18.4	22.1
Autres.	59.3	55.0	32.5	34.9	26.8	20.1
Non-Juifs ensemble .	52.6	57.7	29.7	27.4	22.9	30.3
Palestine au total . . .	49.31	53.47	27.25	24.43	22.06	29.04

Nous constatons ainsi les faits suivants:

1°. Les Juifs ont un taux de *natalité* très inférieur à celui observé chez les non-Juifs.

2°. Les Juifs ont de même un taux de *mortalité* très inférieur à celui des populations non juives.

Par ce double caractère, les Juifs présentent un type démographique plus avancé (dans le sens de la civilisation occidentale) que les autres habitants de la Palestine

3°. Mais en même temps, pour un nombre égal d'habitants (1000), l'*accroissement naturel* est chez les Juifs sensiblement moindre que chez la population non-juive (respectivement 22,9 — 18,1 = 4,8 p. 1000 habitants en 1925 et 30,3 — 23,9 = 6,4 en 1926). Cette derniére constatation aggrave encore singulièrement la conclusion à laquelle nous sommes arrivé à la fin du § précédent.

4°. Ce qui paraîtra encore frappant dans ce tableau à quiconque a l'habitude de la démographie comparée, c'est le taux de natalité exceptionnellement élevé de la population musulmane. Un taux de 55 et de 60 naissances vivantes p. 1000 habitants serait probablement quelque chose d'unique dans son genre. Même de loin rien de pareil ne se voit en Europe et chez les peuples de notre civilisation en général. Il est fort douteux qu'on puisse l'obser-

ver même en dehors de l'Europe. Le grand pays musulman voisin pour lequel nous possédons des statistiques du mouvement naturel de la population, l'Egypte, avait en 1926 un taux de 44,0 naissances vivantes p. 1000 habitants (1). Et comme tout porte à croire que, chez les Arabes de la Palestine, les naissances enregistrées ne sont pas encore toutes les naissances réelles, on devrait donc admettre que le taux réel de la natalité etait chez la population musulmane de la Palestine encore supérieur à 60 p. 1000 habitants. Or ceci nous paraît tout-à-fait improbable. Ce taux incroyable paraît plutôt indiquer que le nombre de la *population musulmane* (auquel le nombre des naissances est rapporté) *est dans la réalité notablement plus élevé qu' on ne l'admet d'après le recensement.* Ces taux presque impossibles nous paraissent donc des preuves indirectes en faveur de l'hypothèse émise en ce sens au début de ce travail (§ 2) pour d'autres raisons. Un nouveau recensement de la population fera connaître d'une façon positive à quel point notre hypothèse est vraie. (Mais en admettant que la population musulmane soit même de 100.000 individus plus nombreuse que ne l'a montré le recensement — et une erreur de pareille dimension dépasse certainement les possibilités réelles — le taux de l'accroissement naturel de la population non juive dépasserait encore celui des Juifs).

5°. Un autre fait qui mérite notre attention c'est la très faible mortalité des Juifs: en 1926, il a été de 12,1 décès p. 1000 habitants. C'est un des taux les plus bas même pour les pays les plus avancés de l'Europe. Il est égal environ à ceux observés la même année en Grande-Bretagne (11,6), en Allemagne (11,7), en Suisse (11,7) ou en Suède (11,8); il est de beaucoup inférieur à ceux observés à la même date en Autriche (14,9) en Italie (16,8) ou en France (17,5), sans parler des pays de l'Europe orientale. Seuls les Pays-Bas (9,8), la Norvège (10,6) et le Danemark (11,0), c'est-à-dire les pays européens de la plus faible mortalité, ont des taux de décès légèrement inférieurs à celui observé chez les Juifs en Palestine. Chez aucun peuple du monde ayant une natalité aussi forte que les Juifs palestiniens (33 et 36 p. 1000 habitants), on ne trouve un si faible taux de décès. Ce fait a été rendu possible grâce surtout à la structure par âge de cette population qui, comme toute population immigrée, compte

---

(1) *Aperçu de la Démographie des divers pays du monde* publié par l'Office Permanent de l'Institut International de Statistique. La Haye 1927, p. VII.

sans doute des éléments adultes jeunes dans une proportion beaucoup plus forte que ce n'est le cas des populations normales.

Le très faible taux général des décès que nous venons de constater chez les Juifs palestiniens nous amène, à son tour, à deux déductions:

a) Comme il paraît tout-à-fait impossible que le taux réel de la mortalité soit chez les Juifs encore plus bas, il faut donc conclure que la population juive de la Palestine n'est en tout cas pas plus nombreuse que celle calculée par le gouvernement palestinien sur la base dù recensement, du mouvement naturel et des migrations.

b) Ce taux de décès étant déjà un des plus bas observés, la baisse ultérieure du taux de la mortalité des Juifs en Palestine ne pourra se faire que très lentement et dans des limites déjà fort restreintes (le taux minimum observé jusqu'ici pour l'espèce humaine est de 9 décès p. 1.000 habitants en Nouvelle Zélande). Le *taux de l'accroissement naturel* qui, tout en étant inférieur à celui des musulmans, est aujourd'hui chez les Juifs en Palestine très élevé (18 p. 1000 en 1925 et 24 en 1926), devra par suite à l'avenir, avec la baisse de la natalité, tendre à diminuer.

Il en est autrement des musulmans palestiniens. Leur taux de mortalité est encore très élevé (31 p. 1000 en 1925 et 29 p. 1000 en 1926). Leur mortalité peut donc encore baisser dans de très fortes proportions. Leur natalité peut ainsi baisser durant de très longues années encore sans que leur accroissement naturel doive pour cela diminuer. Ainsi non seulement l'état actuel, mais aussi les perspectives futures du taux de l'accroissement naturel de la population paraissent plus favorables pour les musulmans que pour les juifs.

§ 12. — *Conclusions.*

Le sionisme ne songe pas à transporter en Palestine la majorité des Juifs habitant ailleurs; il ne peut même pas penser à réduire leur nombre actuel. Ce n'est que pour une partie de l'accroissement naturel de la population juive qu'il peut être question d'aller se fixer en Palestine. C'est à l'aide de cette immigration que le sionisme désire créer en Palestine une majorité juive parmi les habitants du pays.

Mais avec une immigration annuelle de quelque 5 à 6 mille que l'on pourrait raisonnablement admettre, non seulement la supériorité numérique (de 600.000 individus) de la population non-juive

ne peut guère disparaître, mais avec le temps elle tendrait encore à croître; car cette immigration ne couvre qu'un tiers de la différence entre l'accroissement naturel des non-Juifs et celui des Juifs palestiniens. La portée de cette constatation se trouve encore aggravée du fait que non seulement l'accroissement absolu, mais aussi l'accroissement naturel *relatif* (pour un nombre égal d'habitants) est en Palestine pour les non-Juifs plus élevé que pour les Juifs et que cette différence paraît devoir, à l'avenir, encore s'accentuer.

De ces constatations, certaines conclusions se dégagent spontanément:

a) Les Juifs pour lesquels la Palestine répond à un invincible sentiment national doivent chercher dans ce pays autre chose que la constitution d'un Etat juif qui suppose naturellement une majorité d'habitants juifs.

b) Les pays qui ont d'importantes populations juives ne doivent pas se faire d'illusions sur la possibilité de résoudre leur question juive par voie de la Palestine. — C'est aussi en dehors de la Palestine que les huit millions de Juifs qui habitent le Centre-Est de l'Europe doivent chercher l'amélioration générale de leur sort et, en particulier, la solution du problème de leur émigration.

Genève, mars 1928.

Roma - Tip. Failli. CORRADO GINI, *Direttore responsabile.*